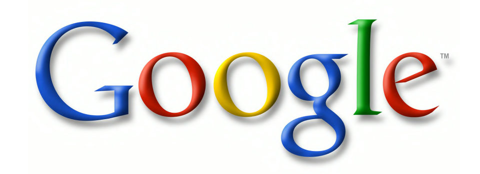
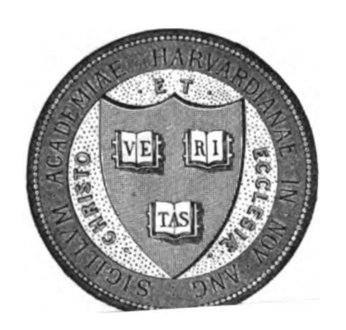
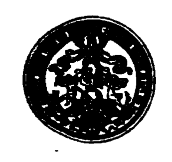
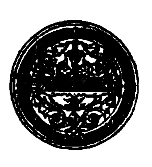



SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS

Dr. A. Kleyer's



Mathematisch-



technisch-naturwissenschaftliche Encyklopädie.

Lehrbuch

der

Zinseszins- und Rentenrechnung.


Digitized by Google

Lehrbuch

der

Zinseszins- und Rentenrechnung

nebst einer

Sammlung von 525 gelösten und ungelösten Aufgaben

aus allen Zweigen des Berufslebens

zum

Gebrauch an niederen und höheren Schulen, zum rationellen Selbststudium, sowie zum praktischen Gebrauch

bearbeitet von

Dr. A. Kleyer

Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hess. Geometer I. Klasse in Frankfurt a. M.



Stuttgart.

Verlag von Julius Maier.

1885.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

Vorwort.

Um den Zweck der Zinseszins- und Rentenrechnung verstehen, die hohe Bedeutung derselben ermessen zu können, empfehle ich das, wenn auch nur ganz oberflächliche Durchlesen der im vorliegenden Buche enthaltenen Aufgaben.

Infolge der Erkenntnis jener hohen Bedeutung, welche die Zinseszins- und Rentenrechnung in ihrer Anwendung auf das kaufmännische Geschäfts-, das praktische Berufs-, das Gesellschafts-, Gemeinde- und Staatsleben genommen hat und stetig noch mehr gewinnt, wurde bereits eine sehr grosse Anzahl von Lehrbüchern über diesen Zweig der Mathematik geschrieben.

Die Beurteilung, ob alle, bezw. welche dieser Bücher den Zwecken entsprechen, für welche sie geschrieben sind, muss ich denjenigen überlassen, welche an der Hand eines oder des andern dieser Bücher das erzielten, was sie wünschten. Nach meinem Dafürhalten kann keines dieser Bücher als Lehrbuch in des Wortes strenger Bedeutung dienen, in welchem der betreffende Verfasser sich damit begnügte, einige der am häufigsten zur Anwendung kommenden Formeln zu entwickeln und vielleicht auch noch an einigen Beispielen zu erläutern suchte, denn ich stelle an ein Lehrbuch die Anforderung, dass ich in demselben über alles, was sich auf den Zweig der Wissenschaft bezieht, für welche das Lehrbuch als solches geschrieben ist, ohne grosse Mühe belehrenden Aufschluss finden kann, — ist dies nicht der Fall, so ist das Buch nur ein Uebungsbuch und das sind die meisten unter dem Titel von Lehrbüchern erscheinenden Bücher, — und da die Zinseszins- und Rentenrechnung nicht in der Entwicklung von Formeln, welche ausschliesslich nur ein Mittel zum Zweck sind, sondern in der Lösung solcher Probleme besteht, bei welchen Zinseszinsen in Rechnung gezogen werden müssen, diese Probleme aber in dem kaufmännischen Geschäfts-, praktischen Berufs-, in dem Gesellschafts-, Gemeinde- und Staatsleben in hundert und hundertfach verschiedener Form auftreten,

— wobei ich auch die Fälle nicht unerwähnt lassen möchte, in welchen im bürgerlichen und Geschäftsleben dem Gebrauch und der Bequemlichkeit entsprechend nach Grundsätzen gerechnet wird, die den streng mathematischen Grundsätzen widersprechen —

so kann unter einem Lehrbuch der Zinseszins- und Rentenrechnung nur ein solches verstanden werden, in welchem diese hundert und hundertfach verschiedenen Formen vorgeführt sind und gezeigt wird, wie man bei der Lösung entsprechender Probleme zu verfahren hat.

Dies war der Grundgedanke, der mich bei Bearbeitung des vorliegenden Buches leitete, und ich habe mich deshalb nicht damit begnügt, Formeln zu ent-

wickeln, sondern ich versuchte ganz besonders an vielen der mannigfaltigsten Aufgaben zu zeigen, in welcher Weise die entwickelten Formeln in den einzelnen Fällen anzuwenden sind und wie in Fällen verfahren werden muss, in welchen man sich nicht mehr durch einfache Substituierung einer Formel helfen konnte, denn nur hierdurch kann der Studierende sowohl als der Praktiker auf rasche und wenig mühevolle Weise eine Umsicht in der Lösung diesbezüglicher Probleme erlangen, die ihn befähigt, in allen vorkommenden Fällen mit mathematischer Bestimmtheit zu entscheiden.

In Betreff der Anordnung des Materials in diesem Buche bemerke ich, dass
der I. Teil desselben ausschliesslich der Zinseszinsrechnung,
„ II. „ „ „ „ Rentenrechnung (Zeitrentenrechnung*)
und der
III. Teil desselben gemischten Aufgaben über die Zinseszins- und Rentenrechnung gewidmet ist.

Während ich in den zwei ersten Teilen die Zinseszins- und die Rentenrechnung als getrennte Teile einer Wissenschaft vorgeführt habe, will ich durch die in dem III. Teil enthaltenen Aufgaben im allgemeinen zeigen, dass eine Grenze zwischen der Zinseszins- und Rentenrechnung nicht besteht, dass der Unterschied beider Rechnungsarten nur in einigen gebräuchlichen Benennungen zu suchen ist.

Dem III. Teile habe ich einige Hülfstafeln, ein ausführliches Formelnverzeichnis und eine übersichtliche Darstellung des Inhalts der in diesem Buche vorgeführten gelösten Aufgaben beigefügt, durch deren Gebrauch das Studium des Buches und die Lösung von Aufgaben erleichtert wird.

Mein Wunsch ist nun der, dass dieses Buch als ein brauchbares Lehr-, Hülfs-, Nachschlage- und Uebungsbuch anerkannt werden möchte.

Frankfurt a. M., im Februar 1885.

Dr. A. Kleyer.

*). Die Berechnungen der Leibrenten etc. sind in meinen Lehrbüchern über das Versicherungswesen enthalten. D. O.

Inhaltsverzeichnis.

I. Teil: Die Zinseszinsrechnung.


Digitized by Google

II. Teil: Die Rentenrechnung.

III. Teil.

I. Teil.

Die Zinseszinsrechnung.

1. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Inhalt: **Algebra.**
Zinseszinsrechnung.
I. Teil. — Seite 1—16.



Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken-** u. **Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Algebra.

Zinseszinsrechnung.

I. Teil. — Seite 1—16.

Inhalt:

Erläuternde Fragen mit Antworten über Zins, Prozent, Zinsfuss, Zinsfaktor und Zinseszinsrechnung. — Entwicklung der Haupt-Zinseszinsformel. — Aufgaben über die 4 möglichen Fälle. — Entwicklung der Formel, wenn sich ein Kapital ver-m-fachen soll. — Entwicklung der Formel, wenn die Zinsen nicht jährlich, sondern in kleineren Zeitabschnitten zum Kapital geschlagen werden. — Gemischte Aufgaben. Anhang ungelöster Aufgaben.

Stuttgart.
Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.
D einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

= **Zweiter unveränderter Abdruck. Neue Subskription.** =

Das auf der Rückseite abgedruckte Inhaltsverzeichnis wird gefälliger Beachtung empfohlen.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle** Teile der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die **gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart, August 1883. **Die Verlagshandlung.**

Algebra.

Zinzeszins-Rechnung.

(1. Teil.)

Inhalt: I. Erläuternde Fragen mit Antworten über Zins, Prozent, Zinsfuss, Zinsfaktor und Zinseszins-Rechnung.
II. Entwicklung der Haupt-Zinseszinsformel.

im allgemeinen Sinne das Verhältnis zu 100. — Im engeren Sinne versteht man unter **Prozent** die Zinsen (auch Verlust oder Gewinn etc.), welche auf 100 Geldeinheiten nach einer gewissen Zeit — einem Jahre — kommen.

Das Zeichen für Prozent ist %, oder pc, auch pCt.

Frage 3. Was ist unter dem **Zinsfusse** zu verstehen und wie wird derselbe bezeichnet?

Antwort. Unter dem **Zinsfusse** ver-

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in **3—4** Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der **wichtigsten** und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in Fragen mit Antworten [illegible]
jedermann verständlich sein [illegible]

[illegible] **Aufgaben zu lösen,** die ge-
[illegible] **Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen geben.**

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische **Aufgaben** werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der **Namen** verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der **Verfasser,** Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart, August 1883. **Die Verlagshandlung.**

Algebra.

Zinzeszins-Rechnung.

(1. Teil.)

I.

Erläuternde Fragen mit Antworten über Zins, Prozent, Zinsfuss, Zinsfaktor und Zinseszins-Rechnung.

Frage 1. Was ist unter **Zins** — im allgemeinen und im engeren Sinne — zu verstehen?

Antwort. Unter **Zins** (foenus, usurae) im allgemeinen versteht man die Vergütung, welche für irgend ein entliehenes Gut zu entrichten ist. — Im engeren Sinne versteht man unter **Zins** die Geld-Vergütung, welche man für ein geliehenes Geldkapital, nach einer gewissen Zeit, entrichten muss.

Frage 2. Was ist unter dem Worte **Prozent** — im allgemeinen und im engeren Sinne — zu verstehen und wie wird dasselbe bezeichnet?

Antwort. Das Wort **Prozent** (Percent), heisst: für hundert — bedeutet mithin im allgemeinen Sinne das Verhältnis zu 100. — Im engeren Sinne versteht man unter **Prozent** die Zinsen (auch Verlust oder Gewinn etc.), welche auf 100 Geldeinheiten nach einer gewissen Zeit — einem Jahre — kommen.

Das Zeichen für Prozent ist %, oder pc, auch pCt.

Frage 3. Was ist unter dem **Zinsfusse** zu verstehen und wie wird derselbe bezeichnet?

Antwort. Unter dem **Zinsfusse** ver-

steht man im bürgerlichen Leben die Zinsen, welche 100 Geldeinheiten nach Verlauf eines Jahres tragen. — Der **Zinsfuss** ist hiernach gleichbedeutend mit Prozent im engeren Sinne und wird mit p bezeichnet.

Streng genommen — versteht man unter Zinsfuss den Zins, welchen die Geldeinheit nach einem Jahre trägt; — ist z. B. ein Kapital zu $p^0/_0$ ausgeliehen, so würde der Zinsfuss $= \frac{p}{100}$ sein; denn $p^0/_0$ heisst: 100 Geldeinheiten tragen in 1 Jahr p Geldeinheiten Zinsen, mithin trägt 1 Geldeinheit in 1 Jahre $\frac{p}{100}$ Geldeinheiten Zinsen.

Letztere Definition des Zinsfusses ist vorzuziehen, weil der Zinsfuss den **Massstab** abgibt, nach welchem die Zinsen eines Kapitals berechnet werden und die Massstäbe für zu messenden und berechnenden Grössen fast stets auf die Einheit bezogen werden.

Anmerkung 1. Unter **Zinsfuss** ist in diesem Werke stets der Zins der Geldeinheit für 1 Jahr, nämlich der Quotient $\frac{p}{100}$ zu verstehen.

Frage 4. Was ist unter dem sogenannten **Zinsfaktor** zu verstehen und wie wird derselbe gefunden, bezw. ausgedrückt?

Antwort. Unter **Zinsfaktor** versteht man den künftigen Wert der Geldeinheit; d. i. der Wert der Geldeinheit nach einem Jahre, wenn dieselbe zu einem gewissen Prozentsatze p ausgeliehen wird.

Der **Zinsfaktor** wird bei gegebenem Prozentsatze p auf folgende Weise gefunden:

Ist ein Kapital (Erkl. 1) zu $p^0/_0$ ausgeliehen, so heisst dies:

100 ℳ bringen nach 1 Jahre bei $p^0/_0$
p ℳ Zinsen;

sonach ist der künftige Wert von 100 ℳ nach 1 Jahre bei $p^0/_0 = (100+p)$ Mark, und der künftige Wert der Geldeinheit nach 1 Jahre bei $p^0/_0$ $= \frac{100+p}{100}$.

Erkl. 1. In diesem Werke sei die Geldeinheit die deutsche Reichsmark, in Zeichen: ℳ.

Somit ist der gesuchte Zinsfaktor = $\frac{100+p}{100}$. Der Ausdruck $\frac{100+p}{100}$ lässt sich auch schreiben: $\frac{100}{100} + \frac{p}{100} = 1 + 0{,}0p = 1{,}0p$ (Erkl. 2).

Erkl. 2. In den Ausdrücken: $1 + 0{,}0p$ oder $1{,}0p$, muss man sich an die Stelle von p immer die Zahl gesetzt denken, welche den Prozentsatz angibt. — Ist z.B. $p = 4$ oder $= 4\frac{1}{2}$ ($= 4{,}5$) so geht $1{,}0p$ über, in: 1,04 oder in: 1,045.

Für den **Zinsfaktor** ergeben sich hiernach folgende Ausdrücke:

Zinsfaktor $= \frac{100+p}{100} = 1 + 0{,}0p = 1{,}0p$, welche je nach der betreffenden Aufgabe ihre Verwendung finden.

Anmerkung 2. In diesem Werke ist zur allgemeinen Bezeichnung **des Zinsfaktors** $\left(\frac{100+p}{100} = 1 + 0{,}0p = 1{,}0p\right)$ das allgemeine Zeichen **q** eingeführt.

Frage 5. In was besteht das Wesen der **zusammengesetzten Zinsrechnung** oder der sogenannten **Zinseszins-Rechnung?**

Antwort. Das Wesen der **zusammengesetzten Zinsrechnung** oder der sogenannten **Zinseszinsrechnung** besteht darin, dass die Zinsen eines Kapitals **nicht** erhoben, sondern zu den Zeitabschnitten an welchen sie eigentlich fällig wären, zum Kapitale geschlagen und mit diesem weiter verzinst werden.

Anmerkung 3. Werden die Zinsen, wie bei der Zinseszins-Rechnung immer wieder nutzbringend zum Kapitale geschlagen, so nennt man dies **kapitalisieren** der Zinsen.

Diese Zinseszinsen heissen in der Rechtskunde: **Anatocismus.**

Frage 6. Bei welchen Berechnungen kommt die Zinseszins-Rechnung in Anwendung?

Antwort. Die Zinseszins-Rechnung kommt überall in Anwendung, wo es sich um die Berechnung des Zuwachses von Dingen handelt, welche sich in analoger Weise, wie in voriger Antwort angegeben, vermehren oder vermindern; wie z. B. die Zuwachsberechnung von Völkern, Städtebewohnern, Wäldern etc. etc.

II.

Entwicklung der Haupt-Zinseszinsformel.

Frage 7. Wie heisst die Haupt-Zinseszinsformel und wie wird dieselbe hergeleitet?

Antwort. Bezeichnet man den künftigen Wert (auch Endkapital genannt) eines Kapitals k, welches n Jahre lang auf Zinseszinsen zu p % steht, mit K, so heisst die Haupt-Zinseszinsformel:

Zinseszinsformel Nr. I. $K = k \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$ oder:

" Nr. Ia. $K = k \cdot 1{,}0p^n$ oder für $\frac{100+p}{100}$ das Zeichen q nach Anm. 2 gesetzt:

" Nr. Ib. $K = k \cdot q^n$.

Diese Formeln werden auf folgende Weise hergeleitet:

Der künftige Wert der Geldeinheit bei p % ist nach Verlauf eines jeden Jahres $= \frac{100+p}{100} =$ dem Zinsfaktor q (s. Antw., Frage 4, Anm. 2).

Hiernach wächst eine Geldeinheit — die Mark (Erklärung 1) — bei p % bis zu Ende des 1. Jahres an zu q Mark.

Diese q Mark stehen nun das 2. Jahr auf Zinsen; — bis zu Ende dieses Jahres wächst die Mark wiederum an zu q Mark, mithin wachsen die q Mark an zu $q \cdot q = q^2$ Mark.

Dies ist der künftige Wert der Geldeinheit — der Mark — bis zu Ende des 2. Jahres.

Die q^2 Mark stehen nun das 3. Jahr auf Zinsen; — bis zu Ende dieses Jahres wächst die Mark wiederum an zu q Mark, mithin wachsen die q^2 Mark an zu $q^2 \cdot q = q^3$ Mark, und dies ist der künftige Wert der Geldeinheit — der Mark — bis zu Ende des 3. Jahres u. s. f.

Setzt man diese Betrachtung fort, so findet man allgemein, den künftigen Wert der Geldeinheit nach n Jahren $= q^n$. Der künftige Wert K der k Geldeinheiten nach n Jahren zu dem Prozentsatze p ist somit: $= k \cdot q^n$ und man hat obige Formel Nr. Ib.: $K = k \cdot q^n$ für q den Wert $1{,}0p$ oder $\frac{100+p}{100}$ ge-

setzt, erhält man obige Formeln Nr. I. und Iᵃ.

Anmerkung 4. Je nach der gestellten Aufgabe wird man zur bequemen Berechnung eine der Formeln unter Nr. I, Iᵃ und Iᵇ wählen.

Dem Gedächtnisse prägt sich am leichtesten die Formel: $K = k \cdot q^n$ ein, nur hat man stets dabei zu beachten, dass $q = \frac{100+p}{100} = 1{,}0p$ ist.

Anmerkung 5. In vorstehender Haupt-Zinseszinsformel können 3 der Grössen: K, k, n und p gegeben, die 4. Grösse gesucht sein; mithin ergeben sich zur Auflösung 4 verschiedene Fälle, welche in nachstehendem in Form von Aufgaben behandelt sind.

III.

Aufgaben über die 4 möglichen Fälle.

Aufgabe 1. Ein Kapital von 2500 ℳ steht zu 4 % auf Zinsen. Zu welcher Summe wächst dasselbe mit den Zinsen und Zinseszinsen in 30 Jahren an?

Formel: $K = k \cdot 1{,}0p^n$

Auflösung. Es ist hier:

das Anfangskapital $k = 2500$, der Prozentsatz $p = 4$, die Anzahl der Jahre $n = 30$ gegeben, und das Endkapital $K = x$ gesucht.

Mit Benutzung obiger Formel, ist:

$$x = 2500 \cdot 1{,}04^{30} \quad \text{(Erkl. 2.)}$$

beiderseits logarithmiert, gibt:

$$\log x = \log 2500 + 30 \cdot \log 1{,}04$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 2500 = & 3{,}3979400 \\ + 30 \cdot \log 1{,}04 = & 0{,}5109990 \text{ (Hülfsrechn.)} \\ \hline \log x = & 3{,}9089390 \\ & 9352 \\ \hline & 38 \\ & 37{,}1 \\ \hline & 0{,}9 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{num} \log x = & 81084 \\ & +07 \\ \hline & 8108{,}47 \end{array}$$

Das ausstehende Kapital ist somit angewachsen, zu:

$$x = K = 8108{,}47 \text{ ℳ} = 8108 \text{ ℳ } 47 \text{ ₰}.$$

Erkl. 2. Alle derartigen Aufgaben, in welchen Potenzen, wie $1{,}04^{30}$ vorkommen, werden mit Logarithmen gelöst; und zwar, wenn n eine grosse Zahl ist, wie hier: $n = 30$, werden sieben-, besser noch, mehrstellige Logarithmen angewandt.

Hülfsrechnung.

$$\begin{array}{rl} \log 1{,}04 = & 0{,}0170333 \\ & .30 \\ \hline 30 \cdot \log 1{,}04 = & 0{,}5109990 \end{array}$$

Aufgabe 2. Ein Kapital, am 1. April 1850 zu $3^1/_2\,^0/_0$ ausgeliehen, wurde am 1. April 1879 mit 42875 ℳ zurückbezahlt. Wie gross war das ausgeliehene Kapital?

Formel: $K = k \cdot 1{,}0p^n$

Auflösung. Es ist hier:

das Endkapital $K = 42875$
der Prozentsatz $p = 3^1/_2 = 3{,}5$
die Anz. d. Jahre $n = 1879 - 1850 = 29$
} gegeben,
und
das Anfangskapital $k = x$ gesucht.

Mit Benutzung obiger Formel, ist:

$$42875 = x \cdot 1{,}035^{29}$$

Der Bequemlichkeit halber vertausche man beide Seiten, alsdann ist:

$$x \cdot 1{,}035^{29} = 42875$$

mithin:

$$x = \frac{42875}{1{,}035^{29}}$$

Die rechte Seite muss nun logarithmisch berechnet werden, da der Ausdruck $1{,}035^{29}$ vorkommt.

Die Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log x = \log 42875 - 29 \cdot \log 1{,}035$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 42875 & = 4{,}6322041 \\ -29 \cdot \log 1{,}035 & = -0{,}4332687 \text{ (Hülfsrechn.)} \\ \hline \log x & = 4{,}1989354 \\ & \quad\;\; 9319 \\ \hline & \quad\quad\;\; 35 \\ & \quad\quad\;\; 27{,}4 \\ \hline & \quad\quad\;\; 7{,}6 \\ & \quad\quad\;\; 5{,}48 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} num \log x & = 15810 \\ & \;\; + 01 \\ & \;\; + 002 \\ \hline num \log x & = 15810{,}12 \end{array}$$

Das ausgeliehene Kapital $x = k$ war somit:

= 15810,12 ℳ
= 15810 ℳ 12 ₰.

Erkl. 3. Ist p ein gemischter oder echter Bruch und es soll für p der Wert, z. B. hier $= 3{,}5$ gesetzt werden, so ist zu beachten, dass:

$$1{,}0p = \frac{100 + p}{100} \text{ ist.}$$

In die rechte Seite für p den Wert 3,5 gesetzt, gibt:

$$\frac{100 + 3{,}5}{100} = \frac{103{,}5}{100} = 1{,}035,$$

wie in der **Auflösung** substituiert wurde.

Hülfsrechnung.

$$\begin{array}{rl} \log 1{,}035 & = 0{,}0149403 \\ & \quad\quad\quad\; .\, 29 \\ \hline & \quad\; 1344627 \\ & \quad\; 298806 \\ \hline 29 \cdot \log 1{,}035 & = 0{,}4332687 \end{array}$$

Aufgabe 3. Es hat Jemand 3750 ℳ und will dieselben, eines bestimmten Zweckes wegen, erst dann in Angriff nehmen, wenn sie zu 9949,87 ℳ angewachsen sind. Wann kann dies geschehen, wenn das Kapital zu $5\,^0/_0$ auf Zinseszinsen ausgeliehen ist?

Formel: $K = k \cdot 1{,}0p^n$

Auflösung. In dieser Aufgabe ist:

das Anfangskapital $k = 3750$
das Endkapital $K = 9949{,}87$
der Prozentsatz $p = 5$
} gegeben,

die Anzahl der Jahre $n = x$ gesucht.

Mit Benutzung obenstehender Formel, ist:

$$9949,87 = 3750 \,.\, 1,05^x$$

oder beide Seiten vertauscht:

$$3750 \,.\, 1,05^x = 9949,87$$

$$1,05^x = \frac{9949,87}{3750}$$

Erkl. 4. Erscheint die Unbekannte, wie in nebenstehender Auflösung, als Exponent einer Potenz, so heisst eine solche Gleichung „Exponentialgleichung." Um solche Gleichungen aufzulösen, betrachte man die ganze Potenz, in welcher die Unbekannte als Exponent vorkommt, zunächst als Unbekannte; löse nach dieser auf und logarithmiere die Gleichung, wodurch die Unbekannte als Faktor erscheint und weiter bestimmt werden kann.

Die ganze Gleichung logarithmiert, gibt:

$$x \,.\, log\ 1,05 = log\ 9949,87 - log\ 3750$$

hieraus:

$$x = \frac{log\ 9949,87 - log\ 3750}{log\ 1,05}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} log\ 9949,87 &= 3,9978144 \\ &\quad + 30,1 \\ &\overline{\ \ 3,9978174} \\ - log\ 3750 &= - 3,5740313 \\ log\ 9949,87 - log\ 3750 &= 0,4237861 \end{aligned}$$

ferner ist:

$$log\ 1,05 = 0,0211893$$

mithin: $$x = \frac{0,4237861}{0,0211893}$$

Anstatt nun diese angedeutete Division auszuführen, logarithmiere man nochmals, so wird:

$$log\ x = log\ 0,4237861 - log\ 0,0211893$$

Erkl. 5. Der *log* einer Zahl mit 0 Ganzen hat eine negative Kennziffer, und zwar mit so vielen Einheiten, als direkt vor und hinter dem Komma Nullen stehen.

Hülfsrechnung.

$$\begin{aligned} log\ 0,0211893 &= 0,3261105 \quad \text{(Erkl. 5)} \\ &\quad + 61,5 \\ &\overline{\ \ 0,3261167-2} \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} log\ 0,4237861 &= 0,6271405 \\ &\quad + 61,2 \\ &\quad\ \ 1,02 \\ &\overline{\ \ 0,6271467-1} \text{ (Erkl. 5)} \\ - log\ 0,0211893 &= 0,3261167-2 \text{ (Hülfsr.)} \\ &\quad - \qquad\qquad + \end{aligned}$$

mithin: $log\ x = 1,3010300$

und: $num\ log\ x = 20$

Nach 20 Jahren kann also das Kapital zu dem gedachten Zwecke in Angriff genommen werden.

Aufgabe 4. Ein Kapital von 4200 ℳ, welches vor 25 Jahren in eine Sparkasse eingezahlt wurde, beträgt jetzt 14222,69 ℳ Zu wie viel % (Prozent = pCt.) verzinste die Sparkasse dies eingelegte Kapital?

Formel: $K = k \,.\, 1,0p^n$

Auflösung. In dieser Aufgabe ist:

das Anfangskapital $k = 4200$ ⎫
das Endkapital $K = 14222,69$ ⎬ gegeben,
die Anzahl der Jahre $n = 25$ ⎭
der Prozentsatz $p = x$ gesucht.

Mit Benutzung obiger Formel, ist:

$$14222,69 = 4200 \,.\, 1,0x^{25}$$

oder: $4200 \cdot 1{,}0x^{25} = 14222{,}69$

$$1{,}0x^{25} = \frac{14222{,}69}{4200}$$

Beiderseits die 25. Wurzel ausgezogen, gibt:

$$1{,}0x = \sqrt[25]{\frac{14222{,}69}{4200}}$$

Erkl. 6. Da in dieser Aufgabe die Unbekannte x ein Glied der Grösse $1{,}0x$ ist, so betrachte man diese Grösse $1{,}0x$ als die Unbekannte. Löse hiernach die gegebene Gleichung auf und beachte, dass $1{,}0x = \frac{100 + x}{100}$ ist.

Zunächst berechne man die Grösse $1{,}0x$ (Erkl. 6); — zu diesem Zwecke die Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log 1{,}0x = \frac{1}{25}\,[\log 14222{,}69 - \log 4200]$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 14222{,}69 = & 4{,}1529607 \\ & +183 \\ & 27{,}45 \\ \hline & 4{,}1529817 \\ -\log 4200 = & -3{,}6232493 \\ \hline \log 14222{,}69 - \log 4200 = & 0{,}5297324 \end{array}$$

mithin: $\log 1{,}0x = \frac{1}{25} \cdot 0{,}5297324$ (Hülfsrech.)

Hülfsrechnung.

$$\begin{array}{r|l|l} 25 & 0{,}5297324 & 0{,}0211893 \\ & 50\cdots\cdots & \\ & 29 & \\ & 25 & \\ & 47 & \\ & 25 & \\ & 223 & \\ & 200 & \\ & 232 & \\ & 225 & \\ & 74 & \\ & 75 & \end{array}$$

oder: $\log 1{,}0x = 0{,}0211893$

folglich: $\text{num} \log 1{,}0x = 1{,}050$

Für $1{,}0x$ den Wert $\frac{100 + x}{100}$ gesetzt, gibt:

$$\frac{100 + x}{100} = 1{,}05$$

$$100 + x = 105$$

$$x = 5$$

Hiernach verzinste die Sparkasse das Kapital zu 5 %.

IV.

Entwicklung der Formel, wenn sich ein Kapital ver-m-fachen soll.

Frage 8. Wie heisst die Zinseszins-Formel, wenn sich ein zu p % ausgeliehenes Kapital k nach einer gewissen Reihe von Jahren (n) ver-m-fachen soll und wie wird dieselbe hergeleitet?

Antwort. Soll sich ein Kapital k nach einer gewissen Reihe von Jahren (n) bei dem Prozentsatze p ver-m-fachen, so heisst die diesbezügliche Zinseszins-Formel:

Zinseszinsformel Nr. II. $m = 1{,}0p^n$ oder auch, für $1{,}0p$ das allgemeine Zeichen q gesetzt:

Nr. IIa. $m = q^n$

Diese Formel kann man, wie folgt, ableiten:

In der Zinseszinsformel:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n$$

bedeutet k das ausgeliehene Kapital; dessen künftiger Wert K soll hier $= m\,.\,k$ sein. Den Wert für $K = m\,.\,k$ in diese Formel substituiert, gibt:

$$m\,.\,k = k \,.\, 1{,}0p^n$$

Beiderseits durch die Grösse k dividiert, gibt obige Formel:

$$m = 1{,}0p^n.$$

Anmerkung 6. In der Formel:

$$m = 1{,}0p^n$$

bedeutet p den Prozentsatz, n die Anzahl der Jahre und m die Zahl, welche angibt, wie oft sich das Kapital k vervielfältigen soll.

Da die Grösse k durch Division aus der Gleichung verschwunden ist, so deutet dies an, dass die Formel $m = 1{,}0p^n$ ganz unabhängig von der Grösse des ausgeliehenen Kapitals ist. Hiernach wird sich jedes Kapital unter denselben Bedingungen ver-m-fachen.

V.

Entwicklung der Formel, wenn die Zinsen nicht jährlich, sondern in kleineren Zeitabschnitten zum Kapitale geschlagen werden.

Frage 9. Wie heisst die Zinseszinsformel, wenn die Zinsen nicht jährlich, sondern in kleineren Zeitabschnitten — z. B. in je $\frac{1}{m}$ Jahr — nutzbringend zum Kapitale geschlagen werden und wie wird diese Formel hergeleitet?

Antwort. Die Zinseszinsformel, wenn die Zinsen nicht jährlich, sondern in kleineren Zeitabschnitten — z. B. in je $\frac{1}{m}$ Jahr — nutzbringend zum Kapitale geschlagen werden, heisst:

Zinseszinsformel Nr. III. $$K = k \,.\, q^{m \cdot n},$$

oder für q seinen Wert $\dfrac{100 + \frac{p}{m}}{100}$ gesetzt:

„ Nr. IIIa. $$K = k \,.\, \left(\frac{100 + \frac{p}{m}}{100}\right)^{m\,.\,n}$$

Diese Formel wird, wie folgt, hergeleitet:

Werden die Zinsen nicht jährlich, sondern nach Verlauf von je $\frac{1}{m}$ Jahr nutzbringend zum Kapitale geschlagen, so wird im bürgerlichen Leben (Erkl. 7) der Prozentsatz für ein solches $\frac{1}{m}$ Jahr proportional diesem Bruchteile des Jahres angenommen.

Erkl. 7. Sollen die Zinsen in kleineren Abschnitten als einem Jahre — in Bruchteilen eines Jahres — nutzbringend zum Kapitale geschlagen werden, so ist überall im bürgerlichen Leben Gebrauch, für einen solchen Jahresbruchteil einen demselben proportionalen Prozentsatz anzunehmen (s. Auflösung). Diese Annahme ist jedoch mathematisch unrichtig und wird an geeigneter Stelle, in einem späteren Hefte, die Unrichtigkeit derselben bewiesen.

Ist der Prozentsatz für 1 Jahr $= p$, so ist er hiernach für $\frac{1}{m}$ Jahr $= \frac{p}{m}$. Der Zinsfaktor q, das ist in diesem Falle der Wert der Geldeinheit bei $p\,\%$ nach $\frac{1}{m}$ Jahr, ist somit $= \frac{100+\frac{p}{m}}{100}$; denn: 100 Geldeinheiten wachsen nach $\frac{1}{m}$ Jahr bei $p\,\%$ an zu $100+\frac{p}{m}$, mithin wächst 1 Geldeinheit nach $\frac{1}{m}$ Jahr bei $p\,\%$ an zu $\frac{100+\frac{p}{m}}{100}$.

Ferner ist die Zahl der Zeitabschnitte, nach welchen die Zinsen zum Kapitale geschlagen werden $= m.n$; denn: werden die Zinsen nach je $\frac{1}{m}$ Jahr zum Kapitale geschlagen, so sind dies in einem Jahre m Zeitabschnitte, mithin in n Jahren $= m.n$ solcher Zeitabschnitte.

In der Formel:

$$K = k \,.\, q^n$$

ist in diesem Falle $q = \frac{100+\frac{p}{m}}{100}$ u. die Anzahl n der Zeitabschnitte $= m.n$.

Die Werte für q und n in die Formel $K = k\,.\,q^n$ substituiert, gibt:

$$K = k \,.\, q^{m.n}$$

oder:

$$K = k \,.\left(\frac{100+\frac{p}{m}}{100}\right)^{m.n}$$

und das sind vorstehende Formeln; in denselben bedeutet m den Bruchteil des Jahres, nach welchen die Zinsen zum Kapitale geschlagen werden.

VI.
Gemischte Aufgaben.

Aufgabe 5. Ein Kapital beträgt gegenwärtig 120000 ℳ und ist zu 5 % auf Zinseszinsen ausgeliehen. Nach wie viel Jahren wird sich das Kapital verdoppelt haben?

Formel: $m = 1{,}0p^n$
(siehe Frage 8.)

Auflösung.

Der Prozentsatz $p = 5$, die Zahl, welche angibt, wie oftmal sich das Kapital vervielfältigen soll $m = 2$ — sind gegeben,
die Anzahl der Jahre $n = x$ ist gesucht.

Man setze diese Werte in obige Formel ein, so ist:

$$2 = 1{,}05^x$$

oder:

$$1{,}05^x = 2$$

logarithmiert, gibt:

$$x \,.\, \log 1{,}05 = \log 2$$

hieraus:

$$x = \frac{\log 2}{\log 1{,}05}$$

$$x = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893}$$

Anstatt diese Division auszuführen, wird abermals logarithmiert, hiernach ist:

$$\log x = \log 0{,}3010300 - \log 0{,}0211893$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 0{,}3010300 = & 0{,}4786098 - 1 \\ - \log 0{,}0211893 = & 0{,}3261167 - 2 \text{ (Hülfsr.)} \\ & - \qquad\quad + \\ \hline \log x = & 1{,}1524931 \\ & \phantom{1{,}15}4718 \\ \hline & \phantom{1{,}152}213 \\ & \phantom{1{,}152}214{,}2 \end{array}$$

und $\quad num \log x = 14{,}2067$

Es wird sich also nach $14{,}2067 = 14\frac{2067}{10000}$ Jahren (= 14 Jahren und etwas mehr als 2 Monaten) das Kapital verdoppelt haben.

Erkl. 8. Wie in nebenstehender Auflösung ersichtlich, kommt es auf die Grösse des Kapitals nicht an. Jedes Kapital, welches zu 5 % auf Zinseszinsen ausgeliehen ist, wird sich in 14 Jahren und 2 Monaten verdoppeln.

Hülfsrechnung.

$$\begin{array}{rl} \log 0{,}0211893 = & 0{,}3261105 \\ & \phantom{0{,}326}+ 61{,}5 \\ \hline & 0{,}3261167 - 2 \text{ (Erkl. 5)} \end{array}$$

Aufgabe 6. Am 15. September 1880 wurde der Holzbestand zweier Gemeindewälder als gleich gross befunden. Wenn nun der Bestand des 1ten Waldes vor 7 Jahren 8425 kbm. betrug und jährlich um 5 % zugenommen hat; wie gross war hiernach der Bestand des 2ten Waldes vor 8 Jahren, wenn derselbe von da ab $4\frac{1}{2}$ % jährlichen Zuwachs hatte?

Formel: $K = k \cdot 1{,}0p^n$

Auflösung. Nach der Aufgabe sind die Holzbestände beider Wälder am 15. Sept. 1880 gleich, mithin besteht hierin der Sinn der anzusetzenden Gleichung.

Für den 1ten Wald ist:

der Anfangsbestand $k = 8425$ kbm.
der jährliche Zuwachs $p = 5$
die Anzahl der Jahre $n = 7$
} gegeben;

Für den 2ten Wald ist:

der Anfangsbestand $k = x$ kbm., gesucht und
der jährliche Zuwachs $p = 4\frac{1}{2} = 4{,}5$
die Anzahl der Jahre $n = 8$
} gegeben.

Die Endbestände K beider Wälder sind einander gleich. Sonach ergibt sich mit doppelter Benutzung obiger Formel die Gleichung:

$$x \cdot 1{,}045^8 = 8425 \cdot 1{,}05^7$$

hieraus:

$$x = \frac{8425 \cdot 1{,}05^7}{1{,}045^8}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log x = \log 8425 + 7 \cdot \log 1{,}05 - 8 \cdot \log 1{,}045$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 8425 &= 3{,}9255699 \\ +\,7 \cdot \log 1{,}05 &= 0{,}1483251 \quad \text{(Hülfsr. 1.)} \\ &\overline{4{,}0738950} \\ -\,8 \cdot \log 1{,}045 &= -0{,}1529304 \quad \text{(Hülfsr. 2.)} \end{aligned}$$

folglich:

$$\begin{aligned} \log x &= 3{,}9209646 \\ & \phantom{=3{,}920}9629 \\ & \overline{\phantom{=3{,}92096}17} \\ & \phantom{=3{,}9209}15{,}6 \end{aligned}$$

hieraus:

$$\text{num} \log x = 8336{,}13 \text{ kbm.}$$

Der Holzbestand des 2ten Waldes war mithin am 15. Sept. 1880 = 8336,13 kbm.

Erkl. 9. Diese und ähnliche Aufgaben werden mit der Zinseszins-Formel gelöst, da der jährliche Zuwachs, wenn nicht ausgeholzt wird, jedes Jahr ebenfalls wächst; ähnlich wie Zinsen, die sich immer wieder verzinsen.

Erkl. 10. Unter Holzbestand eines Waldes versteht man die Menge des Holzes, in Kubikmeter (= kbm.) ausgedrückt.

Hülfsrechnung.

1) $\log 1{,}05 = 0{,}0211893$
$\qquad\qquad\quad .\,7$
$7 \cdot \log 1{,}05 = 0{,}1483251$

und

2) $\log 1{,}045 = 0{,}0191163$
$\qquad\qquad\quad .\,8$
$8 \cdot \log 1{,}045 = 0{,}1529304$

Aufgabe 7. Auf eine zum Verkaufe ausgebotene Liegenschaft bietet A 40000 ℳ bar, B bietet 32000 ℳ bar und nach 3 Jahren ohne Zinsen zahlbar 8500 ℳ; C dagegen bietet 33000 ℳ bar und 10000 ℳ nach 6 Jahren ohne Zinsen zahlbar. Welches von diesen drei Angeboten ist das höchste, wenn 5 % Zinseszinsen der Berechnung zu Grunde gelegt werden?

Formel: $K = k \cdot 1{,}0p^n$

Auflösung. Um zu untersuchen, ob A, B oder C das grösste Angebot gemacht hat, ist es nötig, die baren Werte (Erkl. 11) der einzelnen Angebote zu bestimmen; alsdann kann man durch Vergleichung dieser gefundenen baren Werte

untersuchen, wer das höchste Angebot gemacht hat.

Nun ist:

1) der bare Wert des Angebots von $A = 40000$ ℳ

2) der bare Wert des Angebots von $B =$

$$= 32000 + \frac{8500}{1{,}05^3} \text{ (Erklär. 11.)}$$

Den Bruch logarithmisch berechnet, gibt:

$$log \frac{8500}{1{,}05^3} = log\, 8500 - 3 . log\, 1{,}05$$

$$\text{nun ist:} \quad log\, 8500 = 3{,}9294189$$

$$- 3 . log\, 1{,}05 = -3 . 0{,}0211893 = 0{,}0635679$$

$$\text{folglich:} \quad log \frac{8500}{1{,}05^3} = 3{,}8658510$$

8499

11

11,8

$$\text{und } \frac{8500}{1{,}05^3} = 7342{,}62$$

mithin der bare Wert des Angebots von B

$$= 32000 + 7342{,}62$$

oder: $= 39342{,}62$ ℳ

3) Der bare Wert des Angebots von $C =$

$$= 33000 + \frac{10000}{1{,}05^6} \text{ (Erklär. 11.)}$$

Den Bruch logarithmisch berechnet, gibt:

$$log \frac{10000}{1{,}05^6} = log\, 10000 - 6 . log\, 1{,}05$$

$$\text{nun ist:} \quad log\, 10000 = 4{,}0000000$$

$$- 6 . log\, 105 = -6 . 0{,}0211893 = -0{,}1271358$$

$$\text{folglich:} \quad log \frac{10000}{1{,}05^6} = 3{,}8728642$$

8611

31

29

$$\text{und } \frac{10000}{1{,}05^6} = 7462{,}15$$

mithin der bare Wert des Angebots von C

$$= 33000 + 7462{,}15$$

oder: $= 40462{,}15$ ℳ

Es bot also A, bar	40000	ℳ
„ „ „ B, „	39342,62	„
„ „ „ C, „	40462,15	„

Das Angebot des C ist somit das höchste.

Erkl. 11. Unter dem baren Wert (k) eines Kapitals K, welches nach n Jahren ohne Zinsen zahlbar ist, versteht man diejenige Summe (k), welche sofort auf Zinseszinsen zu einem gewissen Prozentsatze (p) ausgeliehen, nach n Jahren zu dem Kapitale K angewachsen ist; indem der Billigkeit gemäss angenommen werden muss, dass sowohl der Gläubiger als Schuldner das Kapital k auf Zinseszinsen zu gleichen Prozenten ausleihen.

Mithin ist nach obiger Formel:

$$k . 1{,}0p^n = K \text{ oder der bare Wert}$$

$$k = \frac{K}{1{,}0p^n}$$

für k schreibt man alsdann gewöhnlich b,

und für $K = k$

$$\text{mithin: } b = \frac{k}{1{,}0p^n}$$

Aufgabe 8. A schuldet B eine gewisse Summe, zahlbar nach 8 Jahren; nun will aber A diese Schuld sofort bar abtragen und zahlt dem B gleich 5991,66 ℳ Wie viel war A dem B schuldig, wenn B dem A 4 % Diskonto bewilligt hatte?

Formel: $K = k . 1{,}0p^n$

Auflösung. Nach der Aufgabe ist die Barzahlung, die A dem B macht, = 5991,66 ℳ Nun muss der Billigkeit gemäss angenommen werden, dass B diese erhaltene 5991,66 ℳ sofort auf Zinseszinsen anlegt und zwar zu dem-

selben Prozentsatze (4 %) wie der von ihm bewilligte Diskont, und dass dann dieses Kapital nach Ablauf von 8 Jahren zu der Summe angewachsen ist, welche A dem B schuldet.

Mit Benutzung obiger Formel ist daher, wenn für:

$$k = 5991{,}66$$
$$p = 4$$
$$n = 8$$
$$K = x$$

gesetzt wird:

$$x = 5991{,}66 \,.\, 1{,}04^8$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log x = \log 5991{,}66 + 8 \log 1{,}04$$

Nun ist:

$$\log 5991{,}66 = 3{,}7775428$$
$$+ 43{,}8$$
$$3{,}7775472$$
$$+ 8 \,.\, \log 1{,}04 = 0{,}1362664 \quad \text{(Hülfsr.)}$$

folglich: $\log x = 3{,}9138136$
$$8086$$
$$50$$
$$47{,}7$$

hieraus: $num \log x = 8199{,}99$

Die Summe, die A dem B schuldet, ist somit, abgerundet = 8200 ℳ

Erkl. 12. Den Abzug, welchen ein Gläubiger bei Früherzahlung einer Schuld sich gefallen lassen muss, nennt man **Interusurium** oder **Diskonto.**

Es gibt 2 Arten solcher Abzüge:
a) das einfache oder **Hoffmann'sche**
b) das zusammengesetzte oder **Leibnitz'sche Interusurium.**

Der Berechnung des ersteren liegt die **einfache Zinsrechnung**, der des zweiten die **Zinseszinsrechnung** zu Grunde. Die **letztere ist die richtigere** und findet auch in dieser Aufgabe ihre Anwendung.

Hülfsrechnung.

$$\log 1{,}04 = 0{,}0170333$$
$$.\,8$$
$$8 \,.\, \log 1{,}04 = 0{,}1362664$$

Aufgabe 9. Die Bevölkerung eines Staates wurde im J. 1850 zu 38000000 Personen abgeschätzt. Im Jahre 1880 zählte die Bevölkerung desselben Staates 92235800 Personen; wie gross war der Zuwachs?

Formel: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Auflösung. In dieser Aufgabe ist:

die Zahl d. Pers. zu Anf.: $k = 38000000$ } gegeben
„ „ „ „ „ Ende: $K = 92235800$ } gegeben
die Anzahl der Jahre: $n = 1880 - 1850 = 30$ } gegeben
der Prozentsatz: $p = x$ gesucht.

Mit Benutzung obiger Formel, ist:

$$92235800 = 38000000 \,.\, 1{,}0x^{30}$$

Die Gleichung mit 100 abgekürzt und nach $1{,}0x$ aufgelöst, gibt:

$$380000 \,.\, 1{,}0x^{30} = 922358$$
$$1{,}0x^{30} = \frac{922358}{380000}$$

Beiderseits die 30. Wurzel gezogen, gibt:

$$1{,}0x = \sqrt[30]{\frac{922358}{380000}}$$

Wird diese Gleichung logarithmiert, so ist:

$$\log 1{,}0x = \frac{1}{30} [\log 922358 - \log 380000]$$

Erkl. 13. Diese und ähnliche Aufgaben werden wie Zinseszins-Rechnungen gelöst, da sich hier der jährliche Zuwachs wieder vermehrt; ähnlich wie die Zinsen, die sich wieder verzinsen.

Erkl. 14. Unter Zuwachs ist bei diesen und ähnlichen Aufgaben der Zuwachs bei 100 zu verstehen, mithin der Prozentsatz p.

Erkl. 15. Die Grösse $1{,}0x$ betrachte man als Unbekannte, berechne dieselbe und beachte, dass $1{,}0x = \frac{100 + x}{100}$ ist.

Erkl. 16. Der Zuwachs einer Bevölkerung kann durch eigene Vermehrung und auch durch Zuzug entstehen.

Nun ist:

$$\log 922358 = 5{,}9648958$$
$$+ 37{,}6$$
$$5{,}9648996$$
$$- \log 380000 = -5{,}5797836$$

folglich: $\log 1{,}0x = \frac{1}{30} \cdot 0{,}3851160$

oder: $\log 1{,}0x = 0{,}0128372$

mithin: $num\,log\ 1{,}0x = 1{,}030$, d. h.

$$\frac{100 + x}{100} = 1{,}030$$

$$100 + x = 103{,}0$$
$$x = 103{,}0 - 100$$
$$x = 3$$

Der jährliche Zuwachs beträgt somit 3 %.

Aufgabe 10. Wie gross ist ein Kapital, welches zu $4\frac{1}{2}$ % auf Zinseszinsen ausgeliehen und nach 10 Jahren zu 16386,19 ℳ angewachsen ist, wenn die Zinsen monatlich zum Kapitale geschlagen werden?

Formel: $K = k \cdot \left(\frac{100 + \frac{p}{m}}{100}\right)^{m.n}$

(siehe Frage 9.)

Auflösung. Da die Zinsen monatlich — nach jedem zwölften Teile eines Jahres — zum Kapitale geschlagen werden, so wird der Prozentsatz 12 mal kleiner, die Anzahl der Zeitabschnitte 12 mal grösser.

Vorstehende Formel kommt daher in Anwendung, in derselben ist:

das Endkapital $K = 16386{,}19$ \
die Anzahl der Jahre $n = 10$ \
der Prozentsatz $p = 4\frac{1}{2} = 4{,}5$ \
die Zahl der Bruchteile eines Jahres $m = 12$ } gegeben \
und \
das Anfangskapital $k = x$ gesucht.

Diese Werte eingesetzt, gibt:

$$16386{,}19 = x \cdot \left(\frac{100 + \frac{4^1/_2}{12}}{100}\right)^{10.12}$$

$$16386{,}19 = x \cdot \left(\frac{100 + 0{,}375}{100}\right)^{120} \text{(Hülfsr.1.)}$$

oder: $$x \cdot \left(\frac{100{,}375}{100}\right)^{120} = 16386{,}19$$

$$x \cdot 1{,}00375^{120} = 16386{,}19$$

$$x = \frac{16386{,}19}{1{,}00375^{120}}$$

Die Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log x = \log 16386{,}19 - 120 \cdot \log 1{,}00375$$

Hülfsrechnung.

1) $\frac{4^1/_2}{12} = \frac{4{,}5}{12} = 0{,}375$

Nun ist:

log 16386,19 = 4,2144730
+ 26,5
23,85
4,2144780

— 120 . *log* 1,00375 = —0,1950720 (Hülfsr. 2.)

folglich: *log x* = 4,0194060
3656
404
373,5
30,5
29,0

und *num log x* = 10456,97

Das gesuchte Kapital ist mithin, abgerundet = 10457 ℳ

Hülfsrechnung.

2) *log* 1,00375 = 0,0016039
+ 216,5
0,0016256
. 120
325120
16256

120 . *log* 1,00375 = 0,1950720

VII.

Anhang ungelöster Aufgaben.

Aufgabe 1. Zu welcher Summe wächst ein Kapital von 2084,30 ℳ bei $4\frac{1}{2}$ % in 15 Jahren an?

Aufgabe 2. 35800 ℳ sind 10 Jahre ausgeliehen und werden die Zinsen halbjährlich zum Kapitale geschlagen, dabei die halbjährigen Zinsen zu 2 % gerechnet; zu welcher Summe wird dies Kapital anwachsen?

Aufgabe 3. Wie gross ist der Zuwachs von 40000 ℳ, welche auf Zinseszinsen zu $3\frac{3}{4}$ % stehen, wenn die Zinsen vierteljährig zum Kapitale geschlagen werden, nach 12 Jahren?

Aufgabe 4. Welches Kapital wächst nach 15 Jahren bei $3\frac{1}{4}$ % zu 25000 ℳ an?

Aufgabe 5. Zu wie viel Prozent müssen 36000 ℳ ausgeliehen werden, damit sie in 6 Jahren zu 38500 ℳ anwachsen?

Aufgabe 6. Ein bedrängter Familienvater leihte sich bei einem Wucherer 500 ℳ und musste dafür einen Wechsel ausstellen, der auf 800 ℳ lautete und nach 2 Jahren zahlbar war. Wie viel % nahm der Wucherer, wenn Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden?

Aufgabe 7. Zu wie viel Prozent müssen 20000 ℳ stehen, wenn sie in 15 Jahren zu ebensoviel anwachsen sollen, als 26000 ℳ bei $4\frac{1}{2}$ % in 10 Jahren?

Aufgabe 8. In wie viel Jahren wachsen 12560 ℳ bei $5\frac{1}{2}$ % an zu 18000 ℳ?

Aufgabe 9. In wie viel Jahren verfünffacht sich ein Kapital bei $4\frac{1}{2}$ %?

Aufgabe 10. In wie viel Jahren verdoppelt sich ein Kapital bei 5 %?



Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer" kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

Kurz angedeutetes

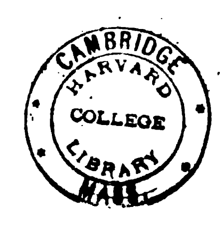
Inhaltsverzeichnis der ersten 80 Hefte.

Heft 23. **Zinseszinsrechnung.** (Forts. von Heft 16.)
„ 24. **Das Apollonische Berührungs-Problem.** (Forts. von Heft 14.)
„ 25. **Die regulären Polyeder.** (Forts. von Heft 22.)
„ 26. **Die Reihen.** (Forts. von Heft 17.)
„ 27. **Ebene Trigonometrie.** (Forts. von Heft 15.)
„ 28. **Die regulären Polyeder.** (Forts. von Heft 25.)
„ 29. **Das Apollonische Berührungs-Problem.** (Forts. von Heft 24.)
„ 30. **Differential-Rechnung.** (Forts. von Heft 6.)
„ 31. **Statik; oder die Lehre vom Gleichgewicht fester Körper.**
„ 32. **Die regulären Polyeder.** (Forts. von Heft 28.)
„ 33. **Das Apollonische Berührungs-Problem.** (Forts. von Heft 29.)
„ 34. **Goniometrie.**
„ 35. **Zinseszinsrechnung.** (Forts. von Heft 23.)
„ 36. **Die regulären Polyeder.** (Forts. von Heft 32.)
„ 37. **Differential-Rechnung.** (Forts. von Heft 30.)
„ 38. **Statik.** (Forts. von Heft 31.)
„ 39. } **Das Apollonische Berührungs-**
„ 40. } **Problem.** (Forts. v. Heft 33.)
„ 41. **Potenzen und Wurzeln.**
„ 42. **Logarithmen.**
„ 43. **Goniometrie.** (Forts. von Heft 34).
„ 44. **Gleichungen vom 1. Grade mit einer Unbekannten.**
„ 45. **Potenzen und Wurzeln.** (Forts. von Heft 41.)
„ 46. **Logarithmen.** (Forts. von Heft 42.)
„ 47. **Die regulären Polyeder.** (Forts. von Heft 36.)
„ 48. **Differential-Rechnung.** (Forts. von Heft 37.)
„ 49. **Statik.** (Forts. von Heft 38.)
„ 50. **Zinseszinsrechnung.** (Forts. von Heft 35.)
„ 51. **Potenzen und Wurzeln.** (Forts. von Heft 45.)
„ 52. **Logarithmen.** (Forts. v. Heft 46.)
„ 53. **Das Apollonische Berührungs-Problem.** (Forts. von Heft 40.)

Heft 54. **Gleichungen vom 1. Grade mit einer Unbekannten.** (Forts. von Heft 44.)
„ 55. **Goniometrie.** (Forts. v. Heft 43.)
„ 56. **Potenzen und Wurzeln.** (Forts. von Heft 51.)
„ 57. **Logarithmen.** (Forts. v. Heft 52.)
„ 58. **Die regulären Polyeder.** (Forts. von Heft 47.)
„ 59. **Differential-Rechnung.** (Forts. von Heft 48.)
„ 60. **Goniometrie.** (Forts. v. Heft 55.)
„ 61. **Die Potenzen.** — Faktorenzerlegung etc. — (Forts. von Heft 56.)
„ 62. **Die Potenzen.** — Faktorenzerlegung etc. — (Forts. von Heft 61.)
„ 63. **Die Potenzen.** Reduktionen mittelst Heben. (Forts. von Heft 62.)
„ 64. **Die Potenzen.** Reduktionen mittelst Vereinigung von Brüchen. — (Forts. von Heft 63.)
„ 65. **Die Potenzen.** Das Potenzieren mit der Zahl Null und mit negativen Exponenten. (Forts. von Heft 64.)
„ 66. **Die Potenzen.** (Forts. v. Heft 65.)
„ 67. **Die Potenzen.** Anhänge u. Schluss der Potenzen.
„ 68. **Die Logarithmen.** (Forts. von Heft 57.)
„ 69. **Die Logarithmen.** (Forts. von Heft 68.)
„ 70. **Die Logarithmen.** (Forts. von Heft 69.)
„ 71. **Die Logarithmen.** (Forts. von Heft 70.)
„ 72. **Die Logarithmen.** (Forts. von Heft 71.)
„ 73. **Die Logarithmen.** (Forts. von Heft 72).
„ 74. **Die Logarithmentafeln.**
„ 75. **Die Logarithmen.** (Forts. von Heft 73.)
„ 76. **Die Logarithmen.** (Forts. von Heft 75.)
„ 77. **Die Logarithmen.** (Forts. von Heft 76.)
„ 78. **Die Logarithmentafeln.** (Forts. von Heft 74.)
„ 79. **Die Logarithmentafeln.** (Forts. von Heft 78.)
„ 80. **Die Logarithmen.** (Forts. und Schluss von Heft 77.)

u. s. f. u. s. f.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.


CAMBRIDGE
HARVARD
COLLEGE
LIBRARY
MASS.

4). Entwicklung der Zinseszinsformel, wenn am Ende eines jeden Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermehrt wird.

Frage 11. Wie heisst die Zinseszinsformel, wenn ein Kapital k zu $p\,\%$ n Jahre lang auf Zinseszinsen steht und dabei am Ende eines jeden Jahres um eine gewisse Summe r vermehrt wird, und wie wird diese Formel hergeleitet?

Antwort. Steht ein Kapital k zu $p\,\%$ n Jahre lang auf Zinseszinsen und wird dasselbe am Ende eines jeden Jahres um die Summe r vermehrt, so heisst, wenn man den künftigen Wert mit K bezeichnet, die diesbezügliche Zinseszinsformel:

Formel 4 . . . . . . $$K = k \,.\, 1{,}0p^n + \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

oder, wenn man den Zinsfaktor q einführt:

Formel 4a . . . . . . $$K = k \,.\, q^n + \frac{r \,.\, (q^n - 1)}{q - 1}$$

Diese Formel kann man auf folgende Weise herleiten:

Das auf Zinseszinsen stehende Kapital k (Anfangskapital) wächst bei $p\,\%$ bis zu Ende des 1. Jahres an, zu: $k\,q$, wenn man den Wert der Geldeinheit (Mark) bei $p\,\%$ nach Verlauf eines Jahres mit q bezeichnet, bezw. den Zinsfaktor q einführt (siehe Erkl. 39). Da nun am Ende eines jeden Jahres die Summe r zugelegt werden soll, so hat man am Ende des 1. Jahres die Summe:

$$k\,q + r$$

Diese $(k\,q + r)$ Mark wachsen, analog wie vorhin (siehe Erkl. 39), bis zu Ende des 2. Jahres an, zu: $(kq + r) \,.\, q$ und da zu dieser Zeit wiederum r Mark zugelegt werden, so hat man am Ende des zweiten Jahres die Summe:

$$(kq + r)\,q + r$$

oder:

$$kq^2 + rq + r$$

Diese Summe wächst bis zu Ende des dritten Jahres an, zu: $(kq^2 + rq + r) \,.\, q$ und da am Ende des dritten Jahres abermals die Summe r zugelegt wird, so hat man am Ende des dritten Jahres die Summe:

$$(kq^2 + rq + r)\,q + r$$

oder:

$$kq^3 + rq^2 + rq + r$$

Setzt man diese Betrachtung auf analoge Weise fort, so wird man für den künftigen Wert K des Kapitals k, welches auf Zinseszinsen steht und am Ende eines jeden Jahres

Erkl. 39. Nach der Definition des Zinsfaktors q (siehe Antw. der Frage 5, bezw. der Frage 4 der 1. Auflage) wächst bei $p\,\%$ 1 Mark bis zu Ende eines Jahres an, zu: $\frac{100 + p}{100} = q$ mithin wachsen k Mark nach Verlauf eines Jahres an, zu:

$$k \cdot \frac{100 + p}{100} = k \,.\, q$$

um die Summe r vermehrt wird, nach dem vierten Jahre:

$$K = kq^4 + rq^3 + rq^2 + rq + r$$

oder allgemein, am Ende des n^{ten} Jahres:

$$1). \ldots K = kq^n + rq^{n-1} + rq^{n-2} + \cdots + rq^2 + rq + r$$

finden.

Die Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung bilden, vom zweiten ab, eine geometrische Reihe (siehe Erkl. 40); fasst man diese Glieder zusammen und schreibt sie in umgekehrter Ordnung, wie folgt:

$$2). \ldots K = kq^n + (r + rq + rq^2 + \cdots rq^{n-2} + rq^{n-1})$$

so ist sofort ersichtlich, dass das erste Glied der geometrischen Reihe in der Klammer $= r$, der Quotient dieser Reihe $= q$ und das letzte Glied derselben $= rq^{n-1}$ ist. Die Summe s sämtlicher Glieder dieser geometrischen Reihe kann man mittelst der Formel:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1} \quad \text{(siehe Erkl. 41)}$$

berechnen, wenn man für das Anfangsglied a, das letzte Glied t und den Quotienten q die vorhin angeführten Werte setzt. Hiernach erhält man:

$$s = \frac{rq^{n-1} \cdot q - r}{q - 1} = \frac{rq^n - r}{q - 1}$$

oder:

$$s = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

Setzt man diesen Wert für die in der Klammer der Gleichung 2). stehende geometrische Reihe ein, so erhält man:

$$K = k \cdot q^n + \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

nämlich umstehende Formel 4ª.

Setzt man in dieser Formel an Stelle des Zinsfaktors q den Wert: $\frac{100 + p}{100} = 1{,}0p$, so erhält man:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n + \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p - 1}$$

oder umstehende Formel 4:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n + \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Erkl. 40. In Betreff der geometrischen Reihen siehe Kleyers Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen.

Erkl. 41. Zwischen dem summatorischen Glied s, dem ersten Glied a, dem Quotient q und dem letzten Glied t einer geometrischen Reihe besteht die Relation:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$

(siehe Kleyers Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Reihen, Seite 19).

Erkl. 42. Der Formel 4 kann man noch durch einfache Umwandlung eine zur schnellen Berechnung geeignetere Form wie folgt geben.

Aus Formel 4 erhält man:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n + \frac{r \cdot 1{,}0p^n - r}{0{,}0p}$$

oder:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n + \frac{r \cdot 1{,}0p^n}{0{,}0p} - \frac{r}{0{,}0p}$$

und hieraus ergibt sich die zur Berechnung von K bequemere Formel 4ᵇ:

Formel 4ᵇ: $$K = \left(k + \frac{r}{0{,}0p}\right) 1{,}0p^n - \frac{r}{0{,}0p}$$

Gelöste Aufgaben.

*). **Aufgabe 11.** Ein Kapital von 6000 ℳ steht auf Zinseszinsen zu 5 % und wird am Ende eines jeden Jahres, ausser den Zinsen, noch um 400 ℳ vermehrt. Was wird der künftige Wert dieses Kapitals nach 10 Jahren sein?

Formel 4b: $K = \left(k + \frac{r}{0{,}0p}\right) 1{,}0p^n - \frac{r}{0{,}0p}$

(siehe Erkl. 42.)

Auflösung.

In der Aufgabe ist:

das Anfangskapital $k = 6000$ ℳ, der Prozentsatz $p = 5$, die Anzahl der Jahre $n = 10$, die jährliche Zulage $r = 400$ ℳ gegeben und der künftige Wert, bezw. das Endkapital $K = x$ gesucht.

Da der Berechnung Zinseszinsen zu Grunde gelegt werden sollen, ausserdem am Ende eines jeden Jahres eine bestimmte Summe: $r = 400$ zugelegt wird und nach dem künftigen Wert K gefragt ist, so kommt vorstehende Formel:

$$K = \left(k + \frac{r}{0{,}0p}\right) 1{,}0p^n - \frac{r}{0{,}0p}$$

als diejenige, aus welcher sich K am bequemsten berechnen lässt (siehe die Erkl. 42 und 43), in Anwendung:

Setzt man die gegebenen Zahlenwerte ein, so erhält man:

$$K = \left(6000 + \frac{400}{0{,}05}\right) 1{,}05^{10} - \frac{400}{0{,}05}$$

oder:

$$K = \left(6000 + \frac{400 \,.\, 100}{5}\right) 1{,}05^{10} - \frac{400 \,.\, 100}{5}$$

oder:

$$K = (6000 + 400 \,.\, 20)\, 1{,}05^{10} - 400 \,.\, 20$$

$$K = (6000 + 8000)\, 1{,}05^{10} - 8000$$

$$K = 14000 \,.\, 1{,}05^{10} - 8000$$

Den ersten Summanden muss man zunächst für sich berechnen; dies geschieht durch Logarithmierung, wie folgt:

$$\log 14000 \,.\, 1{,}05^{10} = \log 14000 + 10 \,.\, \log 1{,}05$$

Nun ist: $\log 14000 = 4{,}1461280$

$10 \,.\, \log 1{,}05 = 10 \,.\, 0{,}0211893 = 0{,}2118930$

$\log 14000 \,.\, 1{,}05^{10} = 4{,}3580210$

0110
100
95,5
4,5
3,8

mithin:

$14000 \,.\, 1{,}05^{10} = 22804{,}52$

Erkl. 43. Dass die in der Erkl. 42 angegebene Formel 4b, wenn nach dem künftigen Werte K gefragt ist, bei numerischen Berechnungen bequemer ist als die Formel 4a, bezw. Formel 4, ersieht man sofort bei der Ausrechnung nebenstehender Aufgabe; indem man bei Benutzung der Formel 4b nur einmal mit Logarithmen zu rechnen hat, während bei Benutzung der Formel 4a, bezw. der Formel 4, sowohl der erste Summand: $k \,.\, 1{,}0p^n$ als auch das Glied: $1{,}0p^n$ des zweiten Summanden, je für sich logarithmisch berechnet werden müssen.

Für den künftigen Wert K hat man sonach:

$$K = 22804{,}52 - 8000 \text{ oder:}$$

oder:

$$K = 14804{,}52 \text{ ℳ}$$

---

*). **Aufgabe 12.** Ein Pachter ist 9 Jahre hindurch mit seiner Pacht von 280 ℳ im Rückstande geblieben. Wieviel hat derselbe am Ende des 9ten Jahres zu zahlen, wenn ihm 5 % Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden?

Formel 4: $K = k \cdot 1{,}0p^n + \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung.

Der Pachter hat am Anfange des 1ten Jahres nichts (0), am Ende des 1ten Jahres seine Pacht mit 280 ℳ zu zahlen; da er mit dieser Summe aber im Rückstande bleibt, so werden ihm 5 % Zinseszinsen in Anrechnung gebracht, ebenso für die am Ende der folgenden 8 Jahre fälligen Pachtsummen, welche der Pachter nicht berichtigt.

Man kann somit zur Berechnung der am Ende des 9. Jahres von dem Pachter zu zahlenden Summe vorstehende Formel:

1). . $K = k \cdot 1{,}0p^n + \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

benutzen.

Setzt man in diese Formel für:

K den gesuchten künftigen Wert x;
k die am Anfang des 1. Jahres zu zahlende Summe, welche für den Pachter $= 0$ ist;
p den Prozentsatz, hier $= 5$;
n die Anzahl der Jahre, hier $= 9$ und schliesslich
r die am Ende eines jeden Jahres fällige Pacht von 280 ℳ,

so hat man zur Bestimmung des künftigen Werts K der rückständigen Pachten, die Bestimmungsgleichung:

$$x = 0 \cdot 1{,}05^9 + \frac{280(1{,}05^9 - 1)}{0{,}05}$$

oder nach Erkl. 44:

$$x = 0 + \frac{280(1{,}05^9 - 1)}{0{,}05}$$

oder:

2). . $x = \frac{280(1{,}05^9 - 1)}{0{,}05}$ (siehe Erkl. 45)

Der Summand $1{,}05^9$ in der Klammer muss nun zunächst für sich berechnet werden; dies geschieht wie folgt:

Erkl. 44. Ein Produkt $(0 \cdot 1{,}05^9)$ wird = Null, wenn ein Faktor desselben = Null ist.

Erkl. 45. Nebenstehende Gleichung 2). hätte man auch mittelst folgender Betrachtung erhalten:

Die am Ende des 1. Jahres fällige Pacht r wächst nach der allgemeinen Zinseszinsformel 1b bis zu Ende des 9. Jahres an, zu: $r \cdot q^8$, weil die Summe r 8 Jahre auf Zinseszinsen steht.

Die zweite fällige Pacht steht 7 Jahre auf Zinseszinsen und wächst bis zu Ende des 9. Jahres an, zu: rq^7 u. s. f.

Die am Ende des 9. Jahres fällige Pacht ist $= r$.

Die Summe der künftigen Werte der einzelnen Pachten bis zu Ende des 9. Jahres ist somit die gesuchte Summe K; sonach hat man:

$$K = rq^8 + rq^7 + rq^6 + rq^5 + rq^4 + rq^3 + rq^2 + rq^1 + r$$

Die Glieder rechts bilden eine geometrische Reihe (siehe Erkl. 40); schreibt man die Glieder in umgekehrter Reihenfolge, so ist:

das Anfangsglied $= r$
der Quotient $= q$
das Endglied $= rq^8$

und man hat, mit Hülfe der Summenformel:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1} \quad \text{(siehe Erkl. 41)}$$

wenn man für das Anfangsglied a, das Endglied t und den Quotienten q diese Werte einführt:

$$s = K = \frac{rq^8 \cdot q - r}{q - 1} = \frac{rq^9 - r}{q - 1}$$

oder für den Zinsfaktor q, den Wert $1{,}0p$ substituiert:

$$K = \frac{r \cdot 1{,}0p^9 - r}{1{,}0p - 1} \text{ oder:}$$

$$K = \frac{r\,(1{,}0p^9 - 1)}{0{,}0p} \text{ oder allgemein:}$$

a). . . $$K = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1}{0{,}0p}$$

In Rücksicht der für r, p und n gegebenen Zahlenwerte erhält man:

$$K = \frac{280\,(1{,}05^9 - 1)}{0{,}05}$$

nämlich dieselbe Gleichung als umstehende Gleichung 2).

$$log\,1{,}05^9 = 9 \cdot log\,1{,}05$$

$$\begin{array}{rcl} log\,1{,}05 & = & 0{,}0211893 \\ & & .\,9 \\ \hline 9 \cdot log\,1{,}05 & = & 0{,}1907037 \\ & & 6958 \\ \hline & & 79 \\ & & 56 \\ \hline & & 23 \\ & & 22{,}4 \end{array}$$

mithin:

$$1{,}05^9 = 1{,}551328$$

Diesen Wert in umstehende Gleichung 2). substituiert, gibt:

$$x = \frac{280\,(1{,}551328 - 1)}{0{,}05}$$

oder:

$$x = \frac{280 \cdot 0{,}551328}{0{,}05}$$

Hieraus kann man x durch Multiplikation und Division oder auf logarithmischem Wege wie folgt berechnen:

$$log\,x = log\,280 + log\,0{,}551328 - log\,0{,}05$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Nun ist: } log\,280 & = & 2{,}4471580 \\ log\,0{,}551328 & = & 0{,}7414037 - 1 \\ & & 63 \\ \hline & & 3{,}1885680 - 1 \\ -\,log\,0{,}05 & = & +\,0{,}6989700 - 2 \\ & & - \qquad\quad + \\ \hline log\,x & = & 2{,}4895980 + 1 \\ \text{oder: } log\,x & = & 3{,}4895980 \\ & & 5929 \\ \hline & & 51 \\ & & 42{,}3 \\ \hline & & 8{,}7 \\ & & 8{,}46 \end{array}$$

(Erkl. 24, Seite 8, bezw. Erkl. 5, Seite 7, der 1. Auflage)

mithin:

$$x = 3087{,}436$$

d. h. der Pachter hat am Ende des 9. Jahres die Summe von 3087 ℳ 44 pf. zu zahlen.

Erkl. 46. Die in der Erkl. 45 entwickelte allgemeine Gleichung a). kommt in den mannigfaltigsten Aufgaben in direkte Anwendung, sie ist deshalb als

Formel 5 . . . . $$K = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

besonders dem Gedächtnisse anzuvertrauen.

Diese Formel liefert eine Relation zur Berechnung des künftigen Wertes K einer am Ende eines jeden Jahres, n Jahre lang, zahlbaren Summe r, wenn p % Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden. Sie kann als Sparkassenformel für am Ende eines jeden Jahres gemachte gleiche Einzahlungen benutzt werden (siehe Erkl. 49 und 56).

---

*). **Aufgabe 13.** Ein Vater hinterlässt seinen Kindern sein ganzes Vermögen, aber unter der Bedingung, dass dieselben einem armen Verwandten 20 Jahre hindurch am Ende eines jeden Jahres 600 ℳ zahlen. Die Kinder wollen sich dieser Verpflichtung entledigen und wissen, welche Abfindungssumme sie zahlen müssen, wenn die Zinseszinsen zu 4 % gerechnet werden.

Formel 1ᵃ: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Formel 5: $K = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung.

Bei der Berechnung der Abfindungssumme x (siehe Erkl. 47), welche die Kinder ihrem Verwandten auf einmal geben wollen, um allen weiteren Verpflichtungen enthoben zu sein, muss der Billigkeit gemäss angenommen werden, dass der künftige Wert der Abfindungssumme x nach 20 Jahren, 4 % Zinseszinsen gerechnet, gleich ist dem künftigen Werte der am Ende eines jeden Jahres, 20 Jahre lang, zu zahlenden Summe von 600 ℳ, wenn auch hier 4 % Zinseszinsen gerechnet werden.

Erkl. 47. Weitere derartige Aufgaben, in welchen sogenannte Abfindungs- oder Ablösungssummen zu berechnen sind, findet man in dem II. Teil, welcher über die Rentenrechnung handelt und auch im III. Teil. Solche Aufgaben können auch mittelst der später aufgestellten Rentenformeln gelöst werden.

Den künftigen Wert der Abfindungssumme x findet man aus vorstehender Formel 1ᵃ. In derselben bedeutet:

K den künftigen Wert (das Endkapital);
k die zu zahlende Abfindungssumme x (das Anfangskapital);
n die Anzahl der Jahre, hier $= 20$;
p den Prozentsatz, hier $= 4$.

Setzt man diese Werte in jene Formel 1ᵃ ein, so erhält man:

1). . . . $K = x \,.\, 1{,}04^{20}$

Ferner findet man den künftigen Wert der am Ende eines jeden Jahres, 20 Jahre lang, zu zahlenden Summe von 600 ℳ nach vorstehender Formel 5. In derselben bedeutet:

K den künftigen Wert K_1;
r die am Ende eines jeden Jahres zu zahlende Summe;
n die Anzahl der Jahre, hier $= 20$ und
p den Prozentsatz, hier $= 4$.

Setzt man diese Werte in jene Formel 5 ein, so erhält man:

2). . . . $K_1 = \frac{600\,(1{,}04^{20} - 1)}{0{,}04}$

Nach dem Eingange der Auflösung besteht nun zwischen den beiden künf-

tigen Werten K und K_1 der Gleichungen 1). und 2)., die neue Gleichung:

$$K = K_1$$

bezw. die Gleichung:

$$x \,.\, 1{,}04^{20} = \frac{600\,(1{,}04^{20} - 1)}{0{,}04}$$

Diese Gleichung nach x aufgelöst, gibt:

$$3). \;.\;.\;.\; x = \frac{600\,(1{,}04^{20} - 1)}{0{,}04\,.\,1{,}04^{20}}$$

Den Summand $1{,}04^{20}$ in der Klammer muss man zunächst für sich berechnen; dies geschieht wie folgt:

$$\log 1{,}04^{20} = 20\,.\log 1{,}04$$

$$\begin{array}{rl} \log 1{,}04 = & 0{,}0170333 \\ & .\,20 \\ \hline \log 1{,}04^{20} = & 0{,}3406660 \\ & 6622 \\ \hline & 38 \\ & 39{,}6 \end{array}$$

mithin:

$$1{,}04^{20} = 2{,}19112$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung 3). ein, so wird:

$$x = \frac{600\,(2{,}19112 - 1)}{0{,}04\,.\,2{,}19112}$$

oder:

$$x = \frac{600\,.\,1{,}19112}{0{,}04\,.\,2{,}19112} = \frac{714{,}67200}{0{,}0876448}$$

Hieraus kann nun x logarithmisch wie folgt berechnet werden:

$$\log x = \log 714{,}672 - \log 0{,}0876448$$

$$\begin{array}{rl} \text{Nun ist: } \log 714{,}672 = & 2{,}8541056 \\ & +12 \\ \hline & 2{,}8541068 \\ -\log 0{,}0876448 = & \pm 0{,}9427261 - 2 \text{ (Hülfsrechn. 1)} \\ & \mp \qquad\qquad + \\ \hline & 1{,}9113807 + 2 \\ \text{oder: } \log x = & 3{,}9113807 \\ & 3760 \\ \hline & 47 \\ & 48{,}6 \end{array}$$

mithin:

$$x = 8154{,}19$$

Die Abfindungssumme ist somit = 8154 ℳ 19 pf.

Hülfsrechnung 1.

$$\begin{array}{rl} \log 0{,}0876448 = & 0{,}9427222 - 2 \\ & 39 \\ \hline & 0{,}9427261 - 2 \end{array}$$

(Erkl. 24, S. 8, bezw. Erkl. 5, S. 7, der 1. Aufl.)

Aufgabe 14. Ein Beamter spart sich jährlich 500 Mark. Wie lange muss er damit fortfahren bis seine Ersparnisse auf 10000 Mark sich belaufen, wenn die betreffende Sparkasse 5 % Zinseszinsen berechnet?

Formel 5: $K = \dfrac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

(siehe Erkl. 46, Seite 21.)

Auflösung.

Der Beamte spart sich jährlich 500 Mark, d. h. am Ende eines jeden Jahres hat derselbe 500 Mark übrig, welche er auf eine Sparkasse trägt, die 5 % Zinseszinsen berechnet.

Erkl. 48. Derartige Aufgaben können auch mittelst den Rentenformeln gelöst werden, siehe den III. Teil.

Zur Berechnung der Zeit, welche erforderlich ist, um 10 000 Mark zu sparen, kommt daher umstehende Formel:

$$K = \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

in Anwendung. In derselben bedeutet:

K den künftigen Wert, hier = 10 000 ℳ;
r die am Ende eines jeden Jahres auf Zinseszinsen angelegten Summen von je 500 ℳ;
p den Prozentsatz, hier = 5 und
n die gesuchte Anzahl x der Jahre.

Erkl. 49. Die in der Erkl. 46, Seite 21, entwickelte Formel 5:

$$K = \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

kann, wie aus dieser Aufgabe ersichtlich ist, zur Berechnung des künftigen Wertes von gleichen jährlichen Sparkasseneinlagen benutzt werden.

Diese Formel kommt im II. Teil bei der Rentenrechnung wieder zur Entwicklung und Anwendung.

Setzt man diese Werte in vorstehende Formel ein, so erhält man:

$$10\,000 = \frac{500(1{,}05^x - 1)}{0{,}05}$$

Diese Gleichung wird wie folgt nach x aufgelöst:

$$10000 \,.\, 0{,}05 = 500(1{,}05^x - 1)$$

$$\frac{10000 \,.\, 0{,}05}{500} = 1{,}05^x - 1$$

oder:

$$1{,}05^x = \frac{10000 \,.\, 0{,}05}{500} + 1$$ (siehe Erkl. 23, Seite 7, bezw. Erkl. 4 d. 1. Aufl.

Den Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung zunächst berechnet, gibt der Reihe nach:

$$1{,}05^x = 20 \,.\, 0{,}05 + 1$$

$$1{,}05^x = 1 + 1$$

oder:

$$1{,}05^x = 2$$

Dies logarithmiert, gibt:

$$x \,.\, \log 1{,}05 = \log 2$$

$$x = \frac{\log 2}{\log 1{,}05}$$

$$x = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893}$$ (siehe Hülfsrechn. 1)

mithin:

$$x = 14{,}20 \ldots \text{ Jahre}$$

Der Beamte erreicht infolge seiner Ersparnisse nach ca. $14\frac{1}{5}$ Jahren die Summe von 10 000 ℳ

Hülfsrechnung 1.

$$\frac{0{,}3010300}{0{,}0211893} = \frac{3010300}{211893}$$

```
211893 | 3010300 | 14,20....
          211893
          ------
           891370
           847572
           ------
            437980
            423786
            ------
            141940
```

5). Entwicklung der Zinseszinsformel, wenn am Ende eines jeden Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermindert wird.

Frage 12. Wie heisst die Zinseszinsformel, wenn ein Kapital k zu p % n Jahre lang auf Zinseszinsen steht, dabei am Ende eines jeden Jahres um eine gewisse Summe r vermindert wird, und wie wird diese Formel hergeleitet?

Antwort. Steht ein Kapital k zu p % n Jahre lang auf Zinseszinsen und wird von demselben am Ende eines jeden Jahres die Summe r weggenommen, so heisst, wenn man den künftigen Wert mit K bezeichnet, die diesbezügliche Zinseszinsformel:

Formel 6 . . . . . $$K = k \,.\, 1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

oder den Zinsfaktor q eingeführt, die Formel:

Formel 6ª . . . . . $$K = kq^n - \frac{r\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Diese Formel kann man, wie Formel 4, auf folgende Weise herleiten (siehe Erkl. 50):

Das auf Zinseszinsen stehende Kapital k (Anfangskapital) wächst bei p % bis zu Ende des 1. Jahres an, zu: kq, wenn man den Wert der Geldeinheit (Mark) bei p % nach Verlauf eines Jahres mit q bezeichnet, bezw. den Zinsfaktor q einführt (siehe Erkl. 39, Seite 17).

Da nun am Ende eines jeden Jahres die Summe r weggenommen werden soll, so hat man am Ende des 1. Jahres die Summe: $kq - r$.

Diese $(kq - r)$ Mark wachsen, analog wie vorhin, siehe Erkl. 39, bis zu Ende des 2. Jahres, an zu: $(kq - r)\,.\,q$ und da zu dieser Zeit wiederum r Mark weggenommen werden, so hat man am Ende des zweiten Jahres die Summe:

$$(kq - r)\,q - r$$

oder:

$$kq^2 - rq - r$$

Diese Summe wächst bis zu Ende des 3. Jahres an, zu: $(kq^2 - rq - r)\,q$ und da am Ende des 3. Jahres abermals die Summe r weggenommen wird, so hat man am Ende des dritten Jahres die Summe:

$$(kq^2 - rq - r)\,q - r$$

oder:

$$kq^3 - rq^2 - rq - r$$

Erkl. 50. Obgleich die Entwicklungen der Formeln 4 und 6 fast identisch sind, und dieselben auch zusammen hergeleitet werden können, so ist zur Repetition und zum gründlichen Verständnis solcher Entwicklungen die Herleitung der Formel 6 hier vollständig vorgeführt.

Setzt man diese Betrachtung auf analoge Weise fort, so wird man den künftigen Wert K des Kapitals k, welches auf Zinseszinsen steht und am Ende eines jeden Jahres um die Summe r vermindert wird, nach dem vierten Jahre:

$$K = kq^4 - rq^3 - rq^2 - rq - r$$

oder allgemein, am Ende des n^{ten} Jahres:

$$1). \ldots K = kq^n - rq^{n-1} - rq^{n-2} - \ldots - rq^2 - rq - r$$

finden.

Die Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung bilden, vom zweiten ab, eine geometrische Reihe (siehe die Erkl. 40, Seite 18); fasst man diese Glieder in einer Klammer zusammen und schreibt sie in umgekehrter Ordnung, wie folgt:

$$2). \ldots K = kq^n - (r + rq + rq^2 + \ldots + rq^{n-2} + rq^{n-1})$$

(siehe Erkl. 51)

so ist sofort ersichtlich, dass das 1. Glied der geometrischen Reihe in der Klammer $= r$, der Quotient dieser Reihe $= q$ und das letzte Glied derselben $= rq^{n-1}$ ist.

Die Summe sämtlicher Glieder dieser geometrischen Reihe kann man mittelst der Formel:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$ (siehe Erkl. 41, Seite 18)

berechnen, wenn man für das Anfangsglied a, das letzte Glied t und den Quotienten q die vorhin angeführten Werte setzt. Hiernach erhält man:

$$s = \frac{rq^{n-1} . q - r}{q - 1} = \frac{rq^n - r}{q - 1}$$

oder:

$$s = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

Setzt man diesen Wert für den in der Klammer der Gleichung 2). stehenden Ausdruck ein, so erhält man:

$$K = kq^n - \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$

nämlich vorstehende Gleichung 6^a^.

Setzt man in dieser Formel an Stelle des Zinsfaktors q den Wert: $\frac{100 + p}{100} = 1{,}0p$, so erhält man:

$$K = k . 1{,}0p^n - \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p - 1}$$

oder vorstehende Formel 6:

$$K = k . 1{,}0p^n - \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Erkl. 51. Damit man in der Klammer nur positive Glieder hat, muss man vor die Klammer ein Minuszeichen setzen. Bei der Auflösung der Klammer in Gleichung 2)., erhält man die Gleichung 1). wieder.

Erkl. 51[a]. Ist die jährliche Verminderung r kleiner als der Betrag der einfachen jährlichen Zinsen des ursprünglichen Kapitals, so muss der Anwachs (die Accumulation) stetig grösser werden. Ist die jährliche Verminderung hingegen grösser als der Betrag jener einfachen Zinsen, so muss der Anwachs stetig kleiner werden, und kann somit $= 0$ und schliesslich negativ werden, d. h. das Verhältnis des Gläubigers und Schuldners hat sich umgekehrt, ist invers geworden.

Erkl. 52. Der Formel 6 kann man noch durch einfache Umwandlung eine zur schnellen Berechnung geeignetere Form wie folgt geben. Aus Formel 6 erhält man:

$$K = k . 1{,}0p^n - \frac{r . 1{,}0p^n - r}{0{,}0p}$$

oder:

$$K = k . 1{,}0p^n - \frac{r . 1{,}0p^n}{0{,}0p} + \frac{r}{0{,}0p}$$

und hieraus ergibt sich die zur Berechnung von K bequemere Formel:

Formel 6^b^:

$$K = \left(k - \frac{r}{0{,}0p}\right) \cdot 1{,}0p^n + \frac{r}{0{,}0p}$$

Erkl. 53. Die Formeln unter Nr. 6 und Nr. 4 kann man zusammenfassen, und schreiben:

a). . . $K = kq^n \pm \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$

oder:

b). . . $K = k \, . \, 1{,}0p^n \pm \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

oder:

c). . . $K = \left(k \pm \frac{r}{0{,}0p}\right) \cdot 1{,}0p^n \mp \frac{r}{0{,}0p}$

wobei zu berücksichtigen ist, dass die oberen Vorzeichen bei einer jährlichen Zulage, die unteren bei einer jährlichen Wegnahme der Summe r zu benutzen sind.

Gelöste Aufgaben.

*). **Aufgabe 15.** Eine Schuld von 15476 Mark steht zu 5 % auf Zinseszinsen; am Ende eines jeden Jahres werden 600 Mark abgetragen. Wieviel beträgt der Rest der Schuld nach Verlauf von 10 Jahren?

Formel 6[b]:

$$K = \left(k - \frac{r}{0{,}0p}\right) \cdot 1{,}0p^n + \frac{r}{0{,}0p}$$

(siehe Formel 6 b in Erkl. 52)

Auflösung.

In dieser Aufgabe ist:

das Anfangskapital $k = 15467$
der Prozentsatz $p = 5$
die Anzahl der Jahre $n = 10$
die am Ende eines jeden Jahres stattfindende jährliche Verminderung $r = 600$
} gegeben

und der künftige Wert $K = x$ gesucht.

Mit Benutzung vorstehender Formel:

$$K = \left(k - \frac{r}{0{,}0p}\right) \cdot 1{,}0p^n + \frac{r}{0{,}0p}$$

erhält man hiernach die Bestimmungsgleichung:

$$x = \left(15467 - \frac{600}{0{,}05}\right) \cdot 1{,}05^{10} + \frac{600}{0{,}05}$$

woraus man x wie folgt berechnen kann:

$$x = \left(15467 - \frac{600 \, . \, 100}{5}\right) 1{,}05^{10} + \frac{600 \, . \, 100}{5}$$

$$x = (15466 - 600 \, . \, 20) \, 1{,}05^{10} + 600 \, . \, 20$$

$$x = (15467 - 12000) \, 1{,}05^{10} + 12000$$

$$x = 3467 \, . \, 1{,}05^{10} + 12000$$

Da nun der erste Summand eine Potenz mit dem Exponenten 10 als Faktor enthält, so muss derselbe zunächst berechnet werden.

Man erhält:

$$\log 3467 \,.\, 1{,}05^{10} = \log 3467 + 10 \,.\, \log 1{,}05$$

$$\log 3467 = 3{,}5399538$$

$$10 \,.\, \log 1{,}05 = 10 \,.\, 0{,}0211893 = 0{,}2118930$$

$$\log 3467 \,.\, 1{,}05^{10} = 3{,}7518468$$

8409

59

60,8

mithin:

$$3467 \,.\, 1{,}05^{10} = 5647{,}38$$

Für den gesuchten künftigen Wert x erhält man sonach:

$$x = 5647{,}38 + 12000$$

oder:

$$x = 17647{,}38 = 17647 \text{ℳ } 38 \text{ pf.}$$

Die Schuld hat sich also vergrössert.

Aufgabe 16. Jemand hat sein Vermögen von 30 000 Mark zu 4 % auf Zinseszinsen gegeben, nimmt aber zur Bestreitung seines Unterhalts am Ende eines jeden Jahres 1800 Mark davon weg. Nach wieviel Jahren wird er sein Vermögen verbraucht haben?

Formel 6:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Auflösung.

In dieser Aufgabe ist:

das Anfangskapital $k = 30\,000$ ℳ
der Prozentsatz $p = 4$
die am Ende eines jeden Jahres stattfindende Wegnahme $r = 1800$ ℳ
} gegeben

ferner ist: der künftige Wert $K = 0$, da die betr. Person ihr Vermögen aufzehren will, und die Anzahl n der Jahre, in welcher dies stattfinden kann, ist gesucht, also $= x$.

In Rücksicht dieser Werte erhält man aus vorstehender Formel:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

die Gleichung:

$$0 = 30000 \,.\, 1{,}04^x - \frac{1800\,(1{,}04^x - 1)}{0{,}04}$$

oder:

$$\frac{1800 \,.\, (1{,}04^x - 1)}{0{,}04} = 30000 \,.\, 1{,}04^x$$

(siehe Erkl. 23, Seite 7, bezw. Erkl. 4 d. 1. Aufl.)

$$1800 \,.\, 1{,}04^x - 1800 = 30000 \,.\, 1{,}04^x \,.\, 0{,}04$$

$$1800 \,.\, 1{,}04^x - 30000 \,.\, 1{,}04^x \,.\, 0{,}04 = 1800$$

$$1{,}04^x\,(1800 - 30000 \,.\, 0{,}04) = 1800$$

(siehe Erkl. 55)

$$1). \;.\;.\; 1{,}04^x = \frac{1800}{1800 - 30000 \,.\, 0{,}04}$$

(siehe Erkl. 54)

Erkl. 54. Die Aufgabe 16 kann man auch auf allgemeine Weise wie folgt lösen:

Das ausgeliehene Kapital k (= 30000) wächst in den n (= x) Jahren bei p (= 4) % an zu:

$$k \,.\, 1{,}0p^n \text{ Mark.}$$

Die am Ende eines jeden Jahres zur Bestreitung des Unterhaltes nötigen r (= 1800) Mark repräsentieren bis Ende des n^{ten} Jahres bei p % nach der Formel 5 (siehe Erkl. 46, Seite 21) einen Wert von:

$$\frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} \text{ Mark.}$$

Soll nun das Kapital k durch die jährliche Wegnahme r vollständig getilgt werden, so besteht die Relation:

$$\text{a)}. \;.\;.\;.\; k \,.\, 1{,}0p^n = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

und hieraus erhält man, nach $1{,}0p^n$ aufgelöst, (wenn n gesucht ist):

$$k \,.\, 1{,}0p^n \,.\, 0{,}0p = r \,.\, 1{,}0p^n - r$$

$$1{,}0p^n\,(r - k \,.\, 0{,}0p) = r \quad \text{oder:}$$

$$\text{b)}. \;.\;.\;.\; 1{,}0p^n = \frac{r}{r - k \,.\, 0{,}0p}$$

(Man vergleiche hiermit nebenstehende Gleichung 1).

Erkl. 55. Die Potenz $1{,}04^x$ wurde, da sie die Unbekannte x enthält, als gemeinschaftlicher Faktor ausgeschieden.

Hülfsrechnung 1.

$$\frac{0{,}4771213}{0{,}0170333} = \frac{4771213}{170333}$$

```
170333 | 4771213 | 28,01
          340666
         -------
         1364553
         1362664
         -------
          188900
```

$$1{,}04^x = \frac{1800}{1800 - 1200} = \frac{1800}{600}$$

$$1{,}04^x = 3$$

Um x zu berechnen, muss man die Gleichung logarithmieren (siehe Erkl. 23, Seite 7, bezw. Erkl. 4 der 1. Auflage), wonach man erhält:

$$x \,.\, log\, 1{,}04 = log\, 3$$

$$x = \frac{log\, 3}{log\, 1{,}04}$$

$$x = \frac{0{,}4771213}{0{,}0170333}$$ (Hülfsrechn. 1)

oder:

$$x = 28{,}01$$

Nach 28 Jahren wird also das Vermögen aufgebraucht sein.

Erkl. 56. Die in der Erkl. 54 entwickelte allgemeine Gleichung a)., in Beziehung auf k aufgelöst, kommt in den mannigfaltigsten Aufgaben in direkte Anwendung, sie ist deshalb als

Formel 7 . . . . . $k = \dfrac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \,.\, 0{,}0p}$

besonders dem Gedächtnisse anzuvertrauen.

Diese Formel liefert eine Relation zur Berechnung des baren Wertes k einer Schuld, die n Jahre auf Zinseszinsen steht und durch am Ende eines jeden Jahres fällige Ratenzahlungen von je r nach Ablauf jene n Jahre getilgt werden soll. Sie kann deshalb als Tilgungsformel oder als Amortisationsformel (siehe Erkl. 59) für am Ende eines jeden Jahres zu machenden gleichen Ratenzahlungen von je r benutzt werden.

Diese Formel kommt im II. Teil bei der Rentenrechnung wieder zur Entwicklung und Anwendung.

---

*). **Aufgabe 17.** Eine Stadt will bei einer Bank ein Anlehen mit der Verpflichtung machen, dasselbe durch einen am Ende jeden Jahres zu zahlenden Betrag von je 10000 ℳ binnen 20 Jahren zu tilgen. Welche Summe wird die Bank der Stadt bei 4 % Zinseszinsen leihen können?

Formel 6: $K = k \,.\, 1{,}0p^n - \dfrac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung.

Der Billigkeit gemäss muss angenommen werden, dass die gesuchte Summe, welche die Stadt von der Bank leiht, sofort auf Zinseszinsen zu 4 % angelegt wird und dass die Stadt der Bank am Ende eines jeden Jahres eine gewisse Summe (10000 Mark) zur Tilgung die-

Erlk. 57. Die von Korporationen, als Gemeinden etc. zu irgend welchen Zwecken, z. B. zur Errichtung von Neubauten, als: Schulen, Kirchen etc., aufgenommenen Gelder werden gewöhnlich in einer bestimmten Reihe von Jahren durch jährlich zu zahlende Summen, Ratenzahlungen, sogenannte Quoten, getilgt oder wie man gewöhnlich zu sagen pflegt „amortisiert“. Die Rechnung, nach welchen derartige Tilgungen ausgeführt werden, heisst dementsprechend „Amortisationsrechnung“ und liegt derselben die Zinseszinsrechnung (oder Rentenrechnung, siehe II. und III. Teil) zu Grunde. Die Ratenzahlungen selbst heissen „Amortisationsquoten“.

Alle Schuldentilgungsrechnungen gehören zu der Amortisationsrechnung.

Erkl. 58. Soll durch jährliche Zahlungen eine Summe getilgt (amortisiert) werden, so muss eine solche Ratenzahlung, Tilgungs- oder Amortisationsquote grösser als die Summe der jährlichen einfachen Zinsen sein (siehe Erkl. 51a).

Erkl. 59. Bei Schuldentilgungen, bezw. bei Amortisations-Rechnungen kommt die in der Erkl. 56 entwickelte Formel:

$$k = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n \,.\, 0{,}0p}$$

zur Anwendung. In derselben bedeutet k die zu tilgende, zu amortisierende Schuld und r die am Ende eines jeden Jahres fällige Tilgungsquote.

Hülfsrechnungen.

1). $\log 1{,}04^{20} = 20 \,.\, \log 1{,}04$

$\log 1{,}04 = 0{,}0170333$
$\quad .20$
$20 \,.\, \log 1{,}04 = 0{,}3406660$

6622
38
39,6

mithin: $1{,}04^{20} = 2{,}19112$

2). $\log 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$
$\log 2{,}19112 = 0{,}3406622$
$\quad 40$
$0{,}9427262 - 2$

ser Schuld abträgt (siehe Erkl. 57), und zwar solange, bis der künftige Wert der geliehenen Summe = 0 wird.

Die Aufgabe kann hiernach mittelst umstehender Formel:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

gelöst werden. In derselben bedeutet:

K den künftigen Wert, derselbe wird bis zur gänzlichen Tilgung = 0;
k das Anfangskapital, das ist die von der Bank geliehene und gesuchte Summe x;
p den Prozentsatz, hier = 4;
n die Anzahl der Jahre, hier = 20, und
r die am Ende eines jeden Jahres abzutragende Summe von 10000 ℳ.

Setzt man diese Werte in vorstehende Formel ein, so erhält man:

$$0 = x \,.\, 1{,}04^{20} - \frac{10000\,(1{,}04^{20} - 1)}{0{,}04}$$

und hieraus findet man x wie folgt:

$$x \,.\, 1{,}04^{20} = \frac{10000\,(1{,}04^{20} - 1)}{0{,}04}$$

oder:

$$1). \quad x = \frac{10000\,(1{,}04^{20} - 1)}{0{,}04 \,.\, 1{,}04^{20}}$$ (siehe Erkl. 59

Die Potenz $1{,}04^{20}$ muss nun zunächst berechnet werden; dies geschieht wie in nebenstehender Hülfsrechn. 1 angegeben.

Hiernach erhält man:

$$x = \frac{10000\,(2{,}19112 - 1)}{0{,}04 \,.\, 2{,}19112}$$

oder:

$$x = \frac{10000 \,.\, 1{,}19112}{0{,}04 \,.\, 2{,}19112}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log x = \log 10000 + \log 1{,}19112 - (\log 0{,}04 + \log 2{,}19112)$$

Nun ist: $\log 10000 = 4{,}0000000$
$+ \log 1{,}19112 = 0{,}0759482$
$\quad + 73$
$\quad 4{,}0759555$
$-(\log 0{,}04 + \log 2{,}19112) = +0{,}9427262 - 2$ (Hlfsr. 2)
$\quad - \quad +$
$\log x = 3{,}1332293 + 2$
oder: $\log x = 5{,}1332293$

2195
98
95,7
2,3
2,2

mithin:
$x = 135903{,}07$

Die Bank kann somit unter den gestellten Bedingungen der Stadt 135903 Mark leihen.

*). **Aufgabe 18.** Eine Schuld von 800 Mark wird in 10 gleichen Jahresraten, am Ende des Jahres zahlbar, abgetragen. Wie gross ist eine solche Rate, wenn 5 % Zinseszinsen gerechnet werden?

Hülfsrechnung.

$$\log 1{,}05^{10} = 10 \,.\, \log 1{,}05$$

$$\log 1{,}05 = 0{,}0211893$$
$$.\,10$$
$$0{,}2118930$$
$$8678$$
$$252$$
$$239{,}4$$

mithin:
$$1{,}05^{10} = 1{,}62889$$

Erkl. 60. Löst man (siehe Erkl. 59) die in der Erkl. 56 aufgestellte Formel 7:

a). . . . $k = \dfrac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^n .\, 0{,}0p}$

welcher man auch den Namen „Tilgungs- oder Amortisationsformel" geben kann, zur Berechnung einer Tilgungsquote nach r auf, so erhält man:

b). . . . $r = \dfrac{k \,.\, 1{,}0p^n .\, 0{,}0p}{1{,}0p^n - 1}$

Diese Gleichung hätte man auch zur Lösung der Aufgabe 18, siehe nebenstehende Gleich. 1). benutzen können.

Formel 6: $K = k \,.\, 1{,}0p^n - \dfrac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung.

Zur Berechnung der gesuchten, am Ende eines jeden Jahres fälligen Rate dient vorstehende Formel. In derselben bedeutet:

K den künftigen Wert, derselbe ist bis zur gänzlichen Tilgung der Schuld $= 0$;
k (Anfangskapital) die Schuld $= 800$ ℳ.
p den Prozentsatz, hier $= 5$;
n die Anzahl der Jahre, hier $= 10$, und
r die gesuchte jährliche Rate x.

Substituiert man diese Werte in obige Formel, so erhält man:

$$0 = 800 \,.\, 1{,}05^{10} - \frac{x\,(1{,}05^{10} - 1)}{0{,}05}$$

Hieraus ergibt sich x, wie folgt:

$$\frac{x\,(1{,}05^{10} - 1)}{0{,}05} = 800 \,.\, 1{,}05^{10}$$

oder:

$$x = \frac{0{,}05 \,.\, 800 \,.\, 1{,}05^{10}}{1{,}05^{10} - 1}$$

Setzt man den in nebenstehender Hülfsrechnung für $1{,}05^{10}$ berechneten Wert ein, so ist:

$$x = \frac{0{,}05 \,.\, 800 \,.\, 1{,}62889}{1{,}62889 - 1}$$

oder:

1). $x = \dfrac{0{,}05 \,.\, 800 \,.\, 1{,}62889}{0{,}62889}$ (siehe Erkl. 60)

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log x = \log 0{,}05 + \log 800 + \log 1{,}62889 - \log 0{,}62889$$

Nun ist: $\log 0{,}05 = 0{,}6989700 - 2$ (Erkl. 24, Seite 8, bezw. Erkl. 5 d. 1. Aufl.)
$+ \log 800 = 2{,}9030900$
$+ \log 1{,}62889 = 0{,}2128678$
$+ 239$

$3{,}8149517 - 2$

$- \log 0{,}62889 = +0{,}7985747 - 1$
$ - \qquad +$

$\log x = 3{,}0168770 - 1$

oder: $\log x = 2{,}0163770$
3647
123
$125{,}4$

mithin: $x = 103{,}843$

Die jährliche Abschlagszahlung beträgt somit: 103 ℳ 84 pf.

*). **Aufgabe 19.** Von einem Walde, dessen jährlicher Zuwachs $2\frac{1}{2}$ Prozent beträgt, ist der gegenwärtige Bestand 51619 Kubikmeter; wie gross ist der Bestand nach 20 Jahren, wenn am Ende eines jeden Jahres 1873 Kubikmeter gefällt werden?

Formel 6: $K = \left(k - \frac{r}{0{,}0p}\right) 1{,}0p^n + \frac{r}{0{,}0p}$

(siehe Formel 6b in der Erkl. 52, Seite 26)

Auflösung.

Da der Holzbestand eines Waldes sich in ähnlicher Weise vermehrt wie ein Kapital, welches auf Zinseszinsen steht, und nach der Aufgabe, am Ende eines jeden Jahres eine gewisse Menge Holz ausgehauen wird, dabei nach dem künftigen Bestand des Waldes gefragt ist, so kann man zur Berechnung vorstehende Formel:

$$K = \left(k - \frac{r}{0{,}0p}\right) 1{,}0p^n + \frac{r}{0{,}0p}$$

benutzen. In derselben bedeutet:

K den gesuchten künftigen Bestand (Wert) x des Waldes;
k den Anfangsbestand = 51619 kbm;
p den Prozentsatz, hier = $2\frac{1}{2}$ = 2,5;
n die Anzahl der Jahre, hier = 20, und
r die Menge der am Ende eines jeden Jahres stattfindenden Ausholzung = 1873 kbm.

Setzt man diese Werte in vorstehende Formel ein, so wird:

$$x = \left(51619 - \frac{1873}{0{,}025}\right) 1{,}025^{20} + \frac{1873}{0{,}025}$$

(siehe Erkl. 61)

oder:

$$x = \left(51619 - \frac{1873 \,.\, 1000}{25}\right) 1{,}025^{20} + \frac{1873 \,.\, 1000}{25}$$

$$x = (51619 - 1873 \,.\, 40) \,.\, 1{,}025^{20} + 1873 \,.\, 40$$

$$x = (51619 - 74920)\, 1{,}025^{20} + 74920$$

$$x = -23301 \,.\, 1{,}025^{20} + 74920$$

Der erste Summand: $23301 \,.\, 1{,}025^{20}$ muss zunächst berechnet werden; dies ist in nebenstehender Hülfsrechnung geschehen, wonach man erhält:

$$x = -38181{,}5 + 74920$$

oder:

$$x = 36738{,}5$$

Der Bestand des Waldes nach 20 Jahren beträgt somit:

36738,5 Kubikmeter.

Erkl. 61. Da $1{,}0p = \frac{100 + p}{100}$ ist, so wird für $p = 2{,}5$ gesetzt:

$$1{,}0p = \frac{100 + 2{,}5}{100} = \frac{102{,}5}{100}$$

oder:

$$1{,}0p = 1{,}025$$ (siehe Erkl. 9, Seite 2, bezw. Erkl. 2 der 1. Auflage).

Hülfsrechnung.

$$log\, 23301 \,.\, 1{,}025^{20} = log\, 23301 + 20 \,.\, log\, 1{,}025$$

$$log\, 23301 = 4{,}3673746$$
$$+ 20 \,.\, log\, 1{,}025 = 20 \,.\, 0{,}0107239 = 0{,}2144780$$
$$4{,}5818526$$
8473
53
57

mithin:

$$23301 \,.\, 1{,}025^{20} = \underline{38181{,}5}$$

23. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Inhalt: **Algebra.** **Zinseszins-Rechnung.** 3. Teil. Seite 33—48.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstgebrauch —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken-** u. **Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Algebra. 3. Teil. Seite 33—48.

Zinseszins-Rechnung.

Inhalt:

Entwicklung der Zinseszinsformeln, wenn am Anfange eines jeden Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermehrt oder vermindert wird. — Entwicklung der Zinseszinsformeln, wenn am Ende (oder auch am Anfange) eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermehrt oder vermindert wird. — Entwicklung der Hauptzinseszinsformel, wenn d[illegible]nzahl n der Jahre eine gemischte oder gebrochene Zahl ist. — Beweis der Allgemeingültigkeit [illegible]rmel I. — Gemischte praktische Aufgaben mit einigen sich daraus ergebenden weiteren Formeln. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Stuttgart 1881.

Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3–4 Hefte. Di[illegible]nen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

[illegible]

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesammtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwicklung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesammtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbstständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandtheil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, tech. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbl. Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die **gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständniss** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem

Zinseszins-Rechnung.

3. Teil.

I.

Entwicklung der Zinseszinsformeln, wenn am Anfange eines jeden Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermehrt oder vermindert wird.

Frage 12. Wie heissen die Zinseszinsformeln, wenn ein Kapital k zu $p\,^0/_0$ n Jahre lang auf Zinseszinsen steht und dasselbe am **Anfange** eines jeden Jahres um eine gewisse Summe r **vermehrt** oder **vermindert** wird, und wie werden diese Formeln hergeleitet?

Antwort. Steht ein Kapital k zu $p\,^0/_0$ n Jahre lang auf Zinseszinsen, so heissen, wenn man den künftigen Wert mit K bezeichnet, und den Zinsfaktor q einführt, die fraglichen Zinseszinsformeln:

Bei einer am **Anfange** eines jeden Jahres um die Summe r stattfindenden **Vermehrung**:

Formel VII. $$K = k\,.\,q^n + \frac{rq\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Bei einer am **Anfange** eines jeden Jahres um die Summe r stattfindenden **Verminderung**:

Formel VIII. $$K = k\,.\,q^n - \frac{rq\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Diese Formeln kann man, wie die Formeln IV und VI, auf folgende Weise gleichzeitig herleiten:

Das auf Zinseszinsen stehende Kapital k wird **sofort**, d. h. am **Anfange** des **ersten** Jahres um die Summe r **vermehrt** oder **vermindert**; man hat somit:

am **Anfange** des 1ten Jahres: $(k \pm r)$

Diese Summe wächst bei p % bis zu **Ende** des 1ten Jahres an, zu: $(k \pm r) q$, wenn man den Wert der Geldeinheit (Mark) bei p % nach Verlauf **eines** Jahres mit q bezeichnet, bezw. den Zinsfaktor q (siehe Seite 2) einführt (Erkl. 15, Seite 17).

Da nun am **Anfange** des **zweiten** Jahres abermals die Summe r **zugelegt** oder **weggenommen** wird, so hat man am **Anfange** des **zweiten** Jahres, die Summe:

$$(k \pm r) q \pm r \text{ oder } =$$
$$kq \pm rq \pm r$$

Diese $(kq \pm rq \pm r)$ Mark wachsen bis zu **Ende** des zweiten Jahres an, zu: $(kq \pm rq \pm r) . q$ und da am **Anfange** des **dritten** Jahres wieder die Summe r **zugelegt** oder **weggenommen** wird, so hat man am **Anfange** des **dritten** Jahres, die Summe:

$$(kq \pm rq \pm r) q \pm r \text{ oder } =$$
$$kq^2 \pm rq^2 \pm rq \pm r$$

und diese $(kq^2 \pm rq^2 \pm rq \pm r)$ Mark wachsen bis zu **Ende** des **dritten** Jahres **an**, zu:

$$(kq^2 \pm rq^2 \pm rq \pm r) q =$$
$$kq^3 \pm rq^3 \pm rq^2 \pm rq \text{ Mark an.}$$

Setzt man diese Betrachtung fort, so wird man für den künftigen Wert K am Ende des 4ten Jahres erhalten:

$$K = kq^4 \pm rq^4 \pm rq^3 \pm rq^2 \pm rq$$

oder **allgemein** am **Ende** des $n$ten **Jahres**:

$$1) \ldots K = kq^n \pm rq^n \pm rq^{n-1} \pm \ldots \pm rq^3 \pm rq^2 \pm rq$$

Bei näherer Betrachtung dieser Gleichung findet man, dass die Glieder rechts, vom zweiten ab, eine **geometrische Reihe** (siehe die geometrischen Reihen) bilden; fasst man diese Glieder in einer Klammer zusammen und schreibt sie, nachdem der gemeinschaftl. Faktor $\pm r$ ausgeschieden wurde, in umgekehrter Ordnung, wie folgt:

Erkl. 22. Damit man in der Klammer der Gleichung 2) nur **positive** Glieder erhält, wurde im ersten Falle $+r$, im zweiten Falle $-r$, als gemeinschaftlicher Faktor ausgeschieden. Bei der Auflösung der Klammer in Gleich. 2) muss man die Gleich. 1) wieder erhalten.

$$2) \ldots K = kq^n \pm r (q + q^2 + q^3 + \ldots q^{n-1} + q^n) \text{ (Erkl. 22)}$$

so ist sofort ersichtlich, dass das erste Glied a der **geometrischen Reihe** in der Klammer $= q$, der Quotient q der Reihe $= q$ und das letzte Glied t der Reihe $= q^n$ ist. Setzt man diese Werte, für a, q und t in die Summenformel:

$$s = \frac{tq - a}{q - 1}$$ (siehe: Die Reihen, Seite 19, Formel 3)

ein, so erhält man für die Summe s der Glieder in der Klammer der Gleich. 2):

$$s = \frac{q^n . q - q}{q - 1} \text{ oder } = \frac{q(q^n - 1)}{q - 1}$$

Diesen Wert für die Parenthese in Gleichung 2) substituiert, gibt:

$$K = k . q^n \pm \frac{rq(q^n - 1)}{q - 1}$$

oder die vorstehenden Formeln 7 u. 8 zusammengefasst.

Anmerkung 14. Setzt man in den vorstehenden Formeln 7 und 8, welche zusammengefasst heissen:

$$K = k . q^n \pm \frac{rq(q^n - 1)}{q - 1}$$

für den Zinsfaktor q, den Wert: $\frac{100 + p}{100} = 1{,}0p$, so hat man die Formeln:

Formel VIIa. u. VIIIa. . . . $K = k . 1{,}0p^n \pm \frac{1{,}0p . r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Diesen Formeln kann man noch durch einfache Umwandlung eine zur schnellen Berechnung geeignetere Form geben, nämlich, man kann schreiben:

$$K = k . 1{,}0p^n \pm \frac{1{,}0p . 1{,}0p^n . r - 1{,}0p . r}{0{,}0p}$$

oder:

$$K = k . 1{,}0p^n \pm \frac{1{,}0p . 1{,}0p^n . r}{0{,}0p} \mp \frac{1{,}0p . r}{0{,}0p}$$

und hieraus erhält man die zur Berech- von K bequemere Formeln:

Formel VIIb. u. VIIIb. . . . $K = \left(k \pm \frac{1{,}0p . r}{0{,}0p}\right) \cdot 1{,}0p^n \mp \frac{1{,}0p . r}{0{,}0p}$

wobei zu bemerken ist, dass die oberen Zeichen bei einer **jährlichen Zulage**, die unteren bei einer **jährlichen Wegnahme** zu benutzen sind.

Anmerkung 15. Ist in der Formel 7 das Anfangskapital $k = 0$, so hat man die neue, abgeleitete Formel:

Formel IX. . . . $K = \frac{r . q(q^n - 1)}{q - 1}$

oder nach Anmerkung 14, die Formel:

Formel IXa. . . . $K = \frac{r . 1{,}0p(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Diese Formeln liefern den **künftigen Wert** K einer am **Anfange** eines jeden Jahres — n Jahre lang — fälligen Summe r, wenn $p\%$ Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden (vgl. Formel V in Anmerkung 9, Seite 22).

II.

Entwicklung der Zinseszinsformeln, wenn am Ende (oder auch Anfange) eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermehrt oder vermindert wird.

Frage 13. Welche Formen nehmen die Formeln unter IV, VI, VII u. VIII an, wenn die Zinsen nicht jährlich, sondern in kleineren Zeitabschnitten — z. B. nach je $\frac{1}{m}$ Jahr nutzbringend zum Kapitale geschlagen werden, und wenn das ausgeliehene Kapital am **Ende** (oder auch am **Anfange**) eines jeden $\frac{1}{m}$ **Jahres** um die Summe r **vermehrt** oder **vermindert** wird?

Formel IV: $K = k \cdot q^n + \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$ (Seite 17)

„ VI: $K = k \cdot q^n - \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$ („ 25)

„ VII: $K = kq^n + \frac{q \cdot r(q^n - 1)}{q - 1}$ („ 33)

„ VIII: $K = kq^n - \frac{q \cdot r(q^n - 1)}{q - 1}$ („ 33)

Antwort. Werden die Zinsen nicht jährlich, sondern in kleineren Zeitabschnitten, z. B. nach je $\frac{1}{m}$ **Jahr**, nutzbringend zum Kapitale geschlagen und wird das ausgeliehene Kapital am **Ende** (oder auch zu **Anfange**) eines jeden $\frac{1}{m}$ **Jahrs** um die Summe r **vermehrt** oder **vermindert**, so wird — analog der Antwort der Frage 9, Seite 9 u. 10 — für q, welches alsdann den Wert der Geldeinheit nach $\frac{1}{m}$ Jahr bei $p\%$ darstellt $= \frac{100 + \frac{p}{m}}{100}$ gesetzt. Ferner ist die Zahl der Zeitabschnitte nach welchen die Zinsen zum Kapitale geschlagen werden (auch die Anzahl der Summen r, welche zugelegt oder weggenommen werden) $= m \cdot n$ (siehe Antwort der Frage 9, Seite 10).

Setzt man hiernach in den vorstehenden Formeln für:

$$q = \frac{100 + \frac{p}{m}}{100} \text{ und für:}$$

$$n = m \cdot n$$

so erhält man, der Reihe nach:

Formel X. . . . . $K = k\left(\frac{100+\frac{p}{m}}{100}\right)^{m.n} + \frac{r\left(\left(\frac{100+\frac{p}{m}}{100}\right)^{m.n}-1\right)}{\frac{100+\frac{p}{m}}{100}-1}$

Dies ist die Formel, wenn das Anfangskapital k am **Ende** eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres um die Summe r **vermehrt** wird (siehe Frage 10).

Formel XI. . . . . $K = k\left(\frac{100+\frac{p}{m}}{100}\right)^{m.n} - \frac{r\left(\left(\frac{100+\frac{p}{m}}{100}\right)^{m.n}-1\right)}{\frac{100+\frac{p}{m}}{100}-1}$

Dies ist die Formel, wenn das Anfangskapital k am **Ende** eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres um die Summe r **vermindert** wird (siehe Frage 11).

Formel XII. $K = k\left(\frac{100+\frac{p}{m}}{100}\right)^{m.n} + \frac{r.\frac{100+\frac{p}{m}}{100}\left(\left(\frac{100+\frac{p}{m}}{100}\right)^{m.n}-1\right)}{\frac{100+\frac{p}{m}}{100}-1}$

Dies ist die Formel, wenn das Anfangskapital k am **Anfange** eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres um die Summe r **vermehrt** wird (siehe Frage 12).

Formel XIII. $K = k\left(\frac{100+\frac{p}{m}}{100}\right)^{m.n} - \frac{r.\frac{100+\frac{p}{m}}{100}\left(\left(\frac{100+\frac{p}{m}}{100}\right)^{m.n}-1\right)}{\frac{100+\frac{p}{m}}{100}-1}$

Dies ist die Formel, wenn das Anfangskapital k am **Anfange** eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres um die Summe r **vermindert** wird (siehe Frage 12).

Bei diesen Formeln ist zu berücksichtigen, dass die Zinsen nach je $\frac{1}{m}$ Jahr nutzbringend zum Kapitale geschlagen werden (siehe Anmerkung 16).

Anmerkung 16. Die Formeln 10, 11, 12 und 13 liessen noch manche Vereinfachungen zu; in den gegebenen Formen stimmen sie jedoch am meisten mit den Formeln überein aus welchen sie abgeleitet wurden, sind somit dem Studierenden am leichtesten erklärlich.

Anmerkung 17. In analoger Weise gehen die Formeln V und IX^a, über in:

Formel XIV. . . . $K = \frac{r\left(\left(\frac{100+\frac{p}{m}}{100}\right)^{m.n}-1\right)}{\frac{100+\frac{p}{m}}{100}-1}$

Diese Formel liefert den **künftigen Wert** einer am **Ende** eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres —

n Jahre lang — fälligen Summe *r*, wenn *p* % Zinseszinsen gerechnet und die Zinsen nach Verlauf eines jeden $\frac{1}{m}$ Jahres nutzbringend zum Kapitale geschlagen werden (siehe Anmerkung 9).

Formel XV. . . . $$K = \frac{r \cdot \frac{100+\frac{p}{m}}{100} \cdot \left(\left(\frac{100+\frac{p}{m}}{100}\right)^{m \cdot n} - 1\right)}{\frac{100+\frac{p}{m}}{100} - 1}$$

Diese Formel liefert den **künftigen Wert** einer am **Anfange** eines jeden $\frac{1}{m}$-Jahres — *n* Jahre lang — fälligen Summe *r*, wenn *p* % Zinseszinsen gerechnet und die Zinsen nach je $\frac{1}{m}$-Jahr nutzbringend zum Kapitale geschlagen werden (siehe Anmerkung 15).

III.

Entwicklung der Hauptzinseszinsformel, wenn die Anzahl n der Jahre eine gemischte oder gebrochene Zahl ist. Beweis der Allgemeingültigkeit der Formel 1.

Frage 14. Gilt die Hauptzinseszinsformel:

$$K = k \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^n (= k \cdot 1{,}0p^n = k \cdot q^n)$$

auch, wenn *n* eine **gemischte** oder **gebrochene** Zahl ist?

Die Aussage ist zu beweisen.

Erkl. 23. Wenn es heisst: ein Kapital steht zu *p* % auf Zinsen oder Zinseszinsen, so sind stets **jährlich** zu zahlende Zinsen bedungen.

Erkl. 24. Für den Endwert $\mathfrak{K}$ des ursprünglichen Kapitals *k* zu *p* % nach den *n* ganzen Jahren hat man nach der Formel 1, Seite 4, die Gleichung:

a) . . . $$\mathfrak{K} = k \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$$

Antwort. Die Hauptzinseszinsformel:

$$K = k \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$$ (siehe Formel 1, S. 4)

welche unter der Annahme aufgestellt wurde, dass *n* eine **ganze Zahl** ist, hat **streng genommen**, auch in den Fällen Gültigkeit, in welchen *n* eine **gebrochene** oder **gemischte** Zahl ist.

Beweis dieser Aussage:

Sind jährlich zu zahlende Zinsen (Prozente) bedungen (Erkl. 23) und es soll z. B. nach $(n + \frac{1}{m})$ Jahren eine Zahlung erfolgen, so muss man zur Berechnung des künftigen Wertes *K* den Endwert $\mathfrak{K}$ nach den *n* **ganzen** Jahren suchen, dann den **Zinsfuss** *x* für das $\frac{1}{m}$ Jahr bestimmen und mit Hülfe desselben ausrechnen, bis zu welcher Summe der Endwert $\mathfrak{K}$ noch in dem $\frac{1}{m}$ Jahr anwächst.

Der für das $\frac{1}{m}$ Jahr zu suchende Zinsfuss *x*, muss — da **jährlich** zu zahlende

Erkl. 25. Bezeichnet man den Zinsfuss, zu welchem sich das Endkapital $\mathfrak{K}$ das $\frac{1}{m}$ Jahr noch zu verzinsen hat, mit x, so hat man:

100 ℳ wachsen in $\frac{1}{m}$ Jahr an, zu $100 + x$, und:

$$\left.\begin{array}{llll} 1 \text{ „ wächst in } & \frac{1}{m} & \text{„ „ „} & \frac{100+x}{100} \\ 1 \text{ „ „ „ } & 2.\frac{1}{m} & \text{„ „ „} & \left(\frac{100+x}{100}\right)^2 \\ 1 \text{ „ „ „ } & 3.\frac{1}{m} & \text{„ „ „} & \left(\frac{100+x}{100}\right)^3 \\ \text{u. s. f.} & & & \\ 1 \text{ ℳ „ „ } & m.\frac{1}{m} & \text{„ „ „} & \left(\frac{100+x}{100}\right)^m \end{array}\right\} \text{analog der Entwicklung der Formel 1, Seite 4.}$$

mithin wachsen die $\mathfrak{K}$ Mark aus Gleichung a) in Erkl. 24 bis zu Ende des letzten ganzen Jahres (von welchem $\frac{1}{m}$ ein Teil ist) an, zu:

$$\mathfrak{K} \cdot \left(\frac{100+x}{100}\right)^m$$

oder für $\mathfrak{K}$ seinen Wert aus Gleichung a) in Erkl. 24 gesetzt, zu:

$$\text{b)} \ldots k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n \cdot \left(\frac{100+x}{100}\right)^m$$

Erkl. 26. Für den Endwert K des ursprünglichen Kapitals k zu p % nach $(n+1)$ ganzen Jahren hat man nach der Formel 1, Seite 4, die Gleichung:

$$\text{c)} \ldots K = k\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+1}$$

Erkl. 27. Ist die Anzahl n der Jahre eine gebrochene Zahl, z. B. $= n + \frac{1}{m}$ und man setzt in Formel I, für $n = n + \frac{1}{m}$, so erhält man:

$$K = k\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+\frac{1}{m}}$$

Dies gibt den fraglichen Endwert des Kapitals k nach $(n + \frac{1}{m})$ Jahren an.

Erkl. 28. Der Endwert $\mathfrak{K}$ des Kapitals k nach n ganzen Jahren, ist nach Gleichung a), Erkl. 24:

$$\mathfrak{K} = k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$$

Dieses Kapital steht nun noch $\frac{1}{m}$ Jahr zu dem gefundenen Prozentsatze:

$$x = 100\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} - 100. \text{ Nun hat man:}$$

Zinsen bedungen sind — offenbar, so festgestellt werden, dass: wenn man das Endkapital $\mathfrak{K}$, welches sich nach den n ganzen Jahren ergibt, zu diesem Zinsfusse x noch das ganze letzte Jahr (von welchem $\frac{1}{m}$ ein Teil ist — also m Zeitabschnitte weiter) auf Zinseszinsen stehen lässt, **genau dasselbe herauskommt**, als wenn man das ursprüngliche Kapital k zu dem gegebenen Zinsfusse p $(n+1)$ Jahre lang auf Zinseszinsen stehen lässt.

Nach den Erklärungen 24, 25 und 26, besteht somit die Gleichung:

$$1) \ldots k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n \cdot \left(\frac{100+x}{100}\right)^m = k\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+1}$$

Hieraus kann man den gesuchten Prozentsatz x für das $\frac{1}{m}$ Jahr, wie folgt, bestimmen:

Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung, mit $k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$, so erhält man:

$$\left(\frac{100+x}{100}\right)^m = \left(\frac{100+p}{100}\right)^1 \text{ oder:}$$

$$2) \ldots \frac{100+x}{100} = \sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} \text{ mithin:}$$

$$100 + x = 100 \cdot \sqrt[m]{\frac{100+p}{100}}$$

und schliesslich für den gesuchten Prozentsatz x:

$$3) \ldots x = 100\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} - 100$$

Will man nun untersuchen, ob die Formel I:

$$K = k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$$

auch Gültigkeit hat, wenn n eine gebrochene (gemischte) Zahl, z. B.:

$$n = n + \frac{1}{m}$$

ist, so muss man untersuchen, ob der Ausdruck:

$$k\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+\frac{1}{m}} \text{ (Erkl. 27)}$$

gleich dem Ausdruck:

$$k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n \cdot \sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} \text{ (Erkl. 28)}$$

ist, ob also die Gleichung:

100 *M.* wachsen in dem $\frac{1}{m}$ Jahr an, zu:

$$100 + 100\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} - 100 = 100 . \sqrt[m]{\frac{100+p}{100}}$$

1 *M.* wächst an in dem $\frac{1}{m}$ Jahr, zu:

$$\frac{100\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}}}{100} = \sqrt[m]{\frac{100+p}{100}}$$

mithin wächst das Endkapital $\mathfrak{K}$ $\left(=k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n\right)$ in dem $\frac{1}{m}$ Jahr noch an, zu:

$$\text{d)} \ldots k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n . \sqrt[m]{\frac{100+p}{100}}$$

Dies gibt den **richtigen** Endwert des Kapitals k nach $(n+\frac{1}{m})$ Jahren an.

$$4) \ldots k\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+\frac{1}{m}} = k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n . \sqrt[m]{\frac{100+p}{100}}$$

eine **identische** ist. Um dies zu untersuchen, setze man für:

$$\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} = \left(\frac{100+p}{100}\right)^{\frac{1}{m}}$$

alsdann erhält man:

$$k\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+\frac{1}{m}} = k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n \left(\frac{100+p}{100}\right)^{\frac{1}{m}}$$

oder:

$$5) \ldots k\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+\frac{1}{m}} = k\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+\frac{1}{m}}$$

Durch die Identität dieser beiden Ausdrücke ist somit bewiesen, dass die Formel I:

$$K = k\left(\frac{100+p}{100}\right)^n = k . 1{,}0p^n$$

Gültigkeit hat, ob n eine **ganze** oder eine **gebrochene** (gemischte) Zahl ist.

Frage 15. Welche Formel wird im **bürgerlichen Leben**, statt der Hauptzinseszinsformel: $K = k . 1{,}0p^n$, in Anwendung gebracht, wenn die Anzahl n der Jahre eine **gebrochene** Zahl, z. B. ein gemischter Bruch von der Form: $(n+\frac{1}{m})$ ist?

Antwort. Obgleich die **Allgemeingültigkeit** der Formel I:

$$K = k . 1{,}0p^n$$

für jeden Wert von n in voriger Antwort nachgewiesen ist, so wird im **bürgerlichen Leben** nichtsdestoweniger in den Fällen in welchen n eine **gebrochene** Zahl ist, z. B. $= (n+\frac{1}{m})$ ist, der Endwert K auf andere und zwar auf folgende Weise bestimmt:

In den ersten n ganzen Jahren, wächst das Kapital k bei dem gegebenen Prozentsatz p an, zu: $k . 1{,}0p^n$; nun wird der Zinsfuss x, (Prozentsatz) zu welchem diese Summe: $k . 1{,}0p^n$ noch das $\frac{1}{m}$ Jahr zu stehen hat, **proportional** diesem Bruchteile des Jahres, nämlich:

$$1) \ldots x, = \frac{p}{m}$$ (siehe Antwort Frage 9),

angenommen.

Man hat somit:

100 *M* wachsen in $\frac{1}{m}$ Jahr an, zu: $100 + \frac{p}{m}$

1 „ wächst „ $\frac{1}{m}$ „ „ „ $\frac{100+\frac{p}{m}}{100}$

mithin wächst die Summe: $k \,.\, 1{,}0p^n$ in dem $\frac{1}{m}$ Jahr noch an, zu:

$$k \,.\, 1{,}0p^n \,.\, \frac{100 + \frac{p}{m}}{100}$$

Für den gesuchten Endwert K nach $(n + \frac{1}{m})$ Jahr hat man somit die in Frage stehende, im bürgerlichen Leben gebräuchliche Formel:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n \left(1 + \frac{p}{100\,m}\right) \text{ oder:}$$

Formel XVI. . . . $K = k \,.\, 1{,}0p^n \left(1 + \frac{0{,}0p}{m}\right)$

Anmerkung 18. Vergleicht man den Zinsfuss:

$$x = 100 \sqrt[m]{\frac{100 + p}{100}} - 100$$

(siehe in der Antw. der Frage 14 unter Gleichung 8)

welcher **streng genommen** für das $\frac{1}{m}$ Jahr in Anwendung gebracht werden müsste, mit dem Zinsfusse:

$x_{,} = \frac{p}{m}$ (siehe in der Antwort der Frage 15 unter Gleichung 1)

welcher im **bürgerlichen Leben** für das $\frac{1}{m}$ Jahr in Anwendung gebracht wird, so findet man, dass **ersterer** kleiner als **letzterer** ist, dass also die Ungleichung besteht:

$$100 \sqrt[m]{\frac{100 + p}{100}} - 100 < \frac{p}{m}, \text{ denn:}$$

addiert man zu beiden Seiten dieser Ungleichung 100 und dividiert dieselben mit 100, so besteht immer noch die Ungleichung:

$$\sqrt[m]{\frac{100 + p}{100}} < \frac{100 + \frac{p}{m}}{100}$$

oder: $\sqrt[m]{1 + 0{,}0p} < 1 + 0{,}0\frac{p}{m}$

" $\sqrt[m]{1{,}0p} < 1{,}0\frac{p}{m}$

was leicht ersichtlich ist.

und zwar mit Recht, da die Nutzniessung der Zinsen für den noch übrigen Teil des Jahres dem Kapitalisten zufällt.

Sonach wird **in der Praxis** der Prozentsatz für den Bruchteil des Jahres zu hoch angenommen, mithin zu Gunsten des Kapitalisten gerechnet (siehe auch die Erkl. 7, Seite 10).

Man vergleiche die Resultate der Aufgabe 20, S. 42, welche nach den beiden Annahmen berechnet wurden.

Anmerkung 19. Bemerkt sei hier, dass in den Aufgaben, in welchen n als ein **ächter** oder **gemischter** Bruch vorkommt, der Prozentsatz für den **Bruchteil** eines Jahres **proportional** diesem Bruchteil angenommen wird (siehe die

Formel IIIa, Seite 9, die Formeln 10, 11, 12 und 13, Seite 37 und Formel 16, S. 41), um nicht gegen den in der Geschäftswelt herrschenden Gebrauch — gegen die Praxis — zu verstossen, obgleich dies, wie in der Anmerkung 18 dargelegt, mathematisch **unrichtig** ist.

Mit den Formeln I bis XVI sind die wichtigsten in der Zinseszinsrechnung zur Anwendung kommenden Formeln entwickelt. — Im nachstehenden sollen nun eine Anzahl der verschiedenartigsten praktischen Aufgaben vorgeführt und Fälle, welche noch weitere Formeln ergeben, besonders behandelt werden.

IV.

Gemischte praktische Aufgaben

mit einigen sich daraus noch ergebenden weiteren Formeln.

Aufgabe 20. Jemand gibt 20000 ℳ auf Zinseszinsen zu 5 % jährlich; wieviel kann er nach 12½ Jahren zurückfordern?

Anmerkung 20. Diese Aufgabe wurde deshalb, einmal nach der **theoretisch richtigen** Formel I, ein andermal nach der in der **Praxis gebräuchlichen** Formel XVI gelöst, um dem Studierenden den Unterschied, welchen beide Resultate ergeben, zu zeigen und die Richtigkeit der unter der Anmerkung 18 ausgesprochenen Behauptung durch ein Zahlenbeispiel zu beweisen.

Alle ähnliche weitere Aufgaben sind nach Anmerkung 19 zu lösen, **wie es im bürgerlichen Leben Gebrauch ist.**

Formeln: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n \left(1 + \frac{0{,}0p}{m}\right)$$

Auflösung 1.

Da, **streng genommen,** die Formel I:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n \quad \text{(siehe Seite 4)}$$

für alle Werte für n Gültigkeit hat (s. die Antw. der Frage 14), so erhält man für den künftigen Wert K, wenn man in diese Formel, für:

das Anfangskapital	$k = 20000$	
den Prozentsatz	$p = 5$	und
die Anzahl n der Jahre	$= 12\frac{1}{2}$	(gemischt Br.)

substituiert, die Gleichung:

$$K = 20000 \,.\, 1{,}05^{12\frac{1}{2}}$$

oder: $$K = 20000 \,.\, 1{,}05^{\frac{25}{2}}$$

Die ganze Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log K = \log 20000 + \frac{25}{2} \,.\, \log 1{,}05$$

Nun ist: $\log 1{,}05 = 0{,}0211893$

```
        0,0211893
            . 25
        ---------
         1059465
         423786
        ---------
        0,5297325
            . 1/2
```

$$\frac{25}{2} \cdot \log 1{,}05 = 0{,}2648662$$
$$+ \log 20000 = 4{,}3010300$$
$$\log K = 4{,}5658962$$

```
  8950
  ----
    12
  11,8
  ----
   0,4
```

mithin:

a) . . . $\underline{K = 36804{,}10}$ ℳ

Auflösung 2.

Benutzt man die **im bürgerlichen Leben übliche** Formel:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n \left(1 + \frac{0{,}0p}{m}\right)$$ (siehe Formel 16, Seite 41)

so erhält man für den künftigen Wert K, wenn man in diese Formel, für:

das Anfangskapital $k = 20000$
den Prozentsatz $p = 5$
die Anzahl n der **ganzen** Jahre $= 12$ und
für m den **Bruchteil** des letzten Jahres $= 2$

substituiert, die Gleichung:

$$K = 20000 \,.\, 1{,}05^{12} \left(1 + \frac{0{,}05}{2}\right) \text{ oder:}$$

$$K = 20000 \,.\, 1{,}05^{12} (1 + 0{,}025)$$

$$K = 20000 \,.\, 1{,}05^{12} \,.\, 1{,}025$$

Die ganze Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log K = \log 20000 + 12 \,.\, \log 1{,}05 + \log 1{,}025$$

Nun ist: $\log 1{,}05 = 0{,}0211893$
. 12
423786
211893

$12 \,.\, \log 1{,}05 = 0{,}2542716$
$+\log 20000 = 4{,}3010300$
$+\log 1{,}025 = 0{,}0107239$
$\log K = 4{,}5660255$
0248
7
7,0

mithin ist:

b) . . . $K = 36815{,}06$ ℳ

Bei Vergleichung der beiden Resultate unter a) und b), findet man eine Differenz, von

36815,06 — 36804,10 = 10,96 ℳ

und zwar ist das Resultat, welches nach der im bürgerlichen Leben gebräuchlichen Formel 16 gefunden wurde, um diese ca. 11 Mark **zu gross** (vgl. die Anm. 18). — Für ein grösseres Kapital beträgt diese Differenz bedeutend mehr (siehe Anm. 20).

Aufgabe 21. Die Einwohnerzahl einer Stadt beträgt gegenwärtig 20000 Einwohner. Wie gross war dieselbe vor 25 Jahren, wenn während dieser Zeit jährlich auf 180 Menschen 9 Geburten und 7 Sterbefälle kamen?

Formel: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

Auflösung.

Diese und ähnliche Aufgaben werden nach der Erkl. 13, Seite 14, mit Hülfe der Zinseszinsformeln gelöst.

In der Aufgabe ist die Zahl der Personen zu Anfang, also:

Erkl. 29. Um diese Aufgabe nach der Zinseszinsformel zu lösen, muss der jährliche Zuwachs für 100, bezw. der Prozentsatz p, wie folgt bestimmt werden:

Auf 180 Einw. kommt ein Zuwachs von: $9 - 7 = 2$

" 1 " " " " von $\frac{2}{180}$

" 100 " " " " " $\frac{2 \cdot 100}{180}$

mithin ist: $p = \frac{2 \cdot 100}{180} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$

Erkl. 30. Für p wurde der Wert $\frac{10}{9}$ gefunden; setzt man diesen Wert für p, in: $1{,}0p = \frac{100 + p}{100}$ ein, so erhält man:

$$\frac{100 + \frac{10}{9}}{100} = \frac{900 + 10}{900} = \frac{910}{900} = \underline{\frac{91}{90}}$$

Hülfsrechnung.

$$\begin{array}{rl} \log 91 = & 1{,}9590414 \\ -\log 90 = & 1{,}9542425 \\ & 0{,}0047989 \\ & .25 \\ & 239945 \\ & 95978 \\ 25\,(\log 91 - \log 90) = & 0{,}1199725 \end{array}$$

k gesucht; ferner ist die Anzahl der Personen nach den 25 Jahren mit $K = 20000$ und die Anzahl n der Jahre $= 25$ gegeben und schliesslich der in der Erkl. 29 bestimmte Prozentsatz: $p = \frac{10}{9}$. Hieraus ist ersichtlich, dass vorstehende Formel:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n \text{ (siehe Formel I, S. 4)}$$

in Anwendung kommt. Mit Rücksicht der gegebenen Zahlen erhält man:

$$20000 = k \cdot \left(1{,}0\frac{10}{9}\right)^{25}$$

oder nach Erkl. 30:

$$k\left(\frac{91}{90}\right)^{25} = 20000, \text{ mithin:}$$

$$k = \frac{20000}{\left(\frac{91}{90}\right)^{25}}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log k = \log 20000 - 25\,(\log 91 - \log 90)$$

$$\begin{array}{rl} \text{Nun ist:} \quad \log 20000 = & 4{,}3010300 \\ -25\,(\log 91 - \log 90) = & -0{,}1199725 \text{ (Hülfsr. 1)} \\ \log k = & 4{,}1810575 \\ & 0428 \\ & 147 \\ \text{mithin:} \quad k = 15172{,}5 & 143{,}5 \end{array}$$

Die Einwohnerzahl betrug sonach vor 25 Jahren — da Bruchteile von Personen keinen Sinn zulassen — <u>15173 Personen.</u>

Aufgabe 22. In wieviel Jahren wird sich bei einem jährlichen Zuwachs von $2\frac{1}{2}\,\%$ der Bestand eines Waldes von 6250 cbm um 4000 cbm erhöhen?

Erkl. 31. Ist der Prozentsatz p ein Bruch oder ein gemischter Bruch, bezw. ein Decimalbruch, so muss man bei dem Aufstellen des Zinsfaktors $1{,}0p$ stets beachten, dass: $1{,}0p = \frac{100 + p}{100}$ ist.

Ist z. B.: $p = 2\frac{1}{2} = 2{,}5$, so ist:

$$1{,}0p = \frac{100 + p}{100} = \frac{100 + 2{,}5}{100} = \frac{102{,}5}{100} = \underline{1{,}025}$$

Formel: $K = k \cdot 1{,}0p^n$

Auflösung.

Der Anfangsbestand k des Waldes ist mit 6250 cbm und der Endbestand K des Waldes mit $6250 + 4000 = 10250$ cbm gegeben; ferner ist der Prozentsatz p für den Zuwachs des Holzes $= 2\frac{1}{2} = 2{,}5$ und die Anzahl n der Jahre gesucht.

Vorstehende Formel:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n \text{ (siehe Formel I, S. 4)}$$

kommt daher in Anwendung. Setzt man die für K, k und p gegebenen Zahlenwerte ein, so wird:

$$10250 = 6250 \cdot 1{,}025^n \text{ (Erkl. 31)}$$

Diese Exponentialgleichung (Erkl. 4) geht zunächst über, in:

$$1{,}025^n = \frac{10250}{6250}$$

Beiderseits logarithmiert, gibt:

$$n \,.\, log\, 1{,}025 = log\, 10250 - log\, 6250$$

mithin erhält man:

$$n = \frac{log\, 10250 - log\, 6250}{log\, 1{,}025} \text{ oder:}$$

$$n = \frac{4{,}0107239 - 3{,}7958800}{0{,}0107239}$$

$$n = \frac{0{,}2148439}{0{,}0107239}$$

Anstatt nun diese angedeutete Division auszuführen, logarithmiere man abermals die ganze Gleichung, wonach man erhält:

$$log\, n = log\, 0{,}2148439 - log\, 0{,}0107239$$

Nun ist:

$log\, 0{,}2148439 = 0{,}3321151-1$ (Erkl. 5)
$+ 60{,}9$
$18{,}27$
$0{,}3321230-1$
$- log\, 0{,}0107239 = 0{,}0303528-2$ (Hülfsr.)
$- \quad +$
folglich: $log\, n = 0{,}3017702+1$
oder: $log\, n = 1{,}3017702$
677
25
21,6

mithin: $n = 20{,}0341$

Der Bestand des Waldes wird sich also — abgerundet — nach 20 Jahren um 4000 cbm erhöht haben — siehe Anmerkung 21 und vergl. die Aufgabe 28.

Anmerkung 21. Da in dem Resultate der Aufgabe 22 n als eine **gebrochene** (gemischte) Zahl, nämlich $n = 20{,}0341$ erscheint, so hätte man, um dem im bürgerlichen Leben üblichen Gebrauch (siehe die Antwort der Frage 15) gerecht zu werden, den Jahresbruchteil 0,0341 auf andere Weise bestimmen müssen (siehe dies in der Aufgabe 28). Da jedoch bei dem Wachstum eines Waldes der **Bruchteil eines Jahres** ohne Bedeutung ist, indem hier nur **ganze** Jahre in Betracht kommen, so ist dies in dieser Aufgabe überflüssig.

Hülfsrechnung.

$log\, 0{,}0107239 = 0{,}0303163-2$ (Erkl. 5)
$+ 364{,}5$
$0{,}0303528-2$

Aufgabe 23. Wenn ein gewisses Kapital zu $4\frac{3}{4}$ % während 12 Jahren, oder zu $5\frac{1}{2}$ % während 9 Jahren, auf Zinseszinsen ausgeliehen wird, so macht dies in den Endkapitalien einen Unterschied von 100 ℳ. Wie gross ist das ausgeliehene Kapital?

Formel: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

(siehe Formel I, Seite 4)

Auflösung.

Um eine Gleichung aufzustellen aus welcher sich das gesuchte Kapital berechnen lässt, beachte man, dass die Endkapitalien des unter verschiedenen Bedingungen ausgeliehenen — gesuchten — Kapitals um 100 ℳ verschieden sind.

Nach der ersten Annahme, ist:

das Endkapital $K = K$ unbekannt,
der Prozentsatz $p = 4\frac{3}{4} = 4{,}75$ } gegeben
die Anzahl d. Jahre $n = 12$ }
das Anfangskapital k gesucht.

Substituiert man diese Werte in obige Formel, so erhält man:

1) . . . $K = k \cdot 1{,}0475^{12}$ (Erkl. 31)

Nach der zweiten Annahme, ist:

das Endkapital $K = \mathfrak{K}$ unbekannt,
die Anzahl d. Jahre $n = 9$ } gegeben
der Prozentsatz $p = 5\frac{1}{2} = 5{,}5$ } gegeben
und das Anfangskapital (wie vorhin) k gesucht.

Substituiert man diese Werte in vorstehende Formel, so erhält man:

2) . . . $\mathfrak{K} = k \cdot 1{,}055^{9}$ (Erkl. 31)

Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt nun, da man den Unterschied der beiden Endkapitalien K und $\mathfrak{K}$ kennt, die anzusetzende Bestimmungsgleichung:

3) . . . $K - \mathfrak{K} = 100$

bezw. die Gleichung:

4) . . . $k \cdot 1{,}0475^{12} - k \cdot 1{,}055^{9} = 100$

Scheidet man den gemeinschaftlichen Faktor k aus, so wird:

$$k\,(1{,}0475^{12} - 1{,}055^{9}) = 100$$

oder: $$k = \frac{100}{1{,}0475^{12} - 1{,}055^{9}}$$

Der Nenner dieses Bruches ist eine algebraische Summe, welche zunächst gebildet werden muss.

Nach nebenstehenden Hülfsrechnungen 1) und 2) erhält man:

$$k = \frac{100}{1{,}74521 - 1{,}61909}$$

oder: $$k = \frac{100}{0{,}12612}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log k = \log 100 - \log 0{,}12612$$

Nun ist: $\log 100 = 2{,}0000000$
$-\log 0{,}12612 = 0{,}1007840 - 1$ (Erkl. 5)
(− +)
folglich: $\log k = 1{,}8992160 + 1$
oder: $\log k = 2{,}8992160$
29
31
33

mithin: $k = 792{,}896$

Das gesuchte Kapital k ist sonach $=$ 792 ℳ 90 pf.

Hülfsrechnungen.

1). $\log 1{,}0475^{12} = 12 \cdot \log 1{,}0475$

Nun ist: $\log 1{,}0475 = 0{,}0201540$
. 12
403080
201540
$\log 1{,}0475^{12} = 0{,}2418480$
52
28
mithin: 24,9
$1{,}0475^{12} = \underline{1{,}74521}$

2). $\log 1{,}055^{9} = 9 \cdot \log 1{,}055$

Nun ist: $\log 1{,}055 = 0{,}0232525$
. 9
$\log 1{,}055^{9} = 0{,}2092725$
468
257
242
mithin: 15
$1{,}055^{9} = \underline{1{,}61909}$

Aufgabe 24. Es legt Jemand bei einer Sparkasse 1500 ℳ auf Zinseszinsen zu $3\frac{3}{4}$ % an. Die Sparkasse verleiht dieses Geld wieder zu 4 % und zwar unter der Bedingung, dass die

Formeln: 1) $K = k \cdot 1{,}0p^{n}$

2) $$K = k\left(\frac{100 + \frac{p}{m}}{100}\right)^{m \cdot n}$$

Zinsen ihr vierteljährlich zum Kapitale geschlagen werden. Wie gross war der Gewinn der Sparkasse, wenn am Ende des 12. Jahres die Auszahlung des Geldes erfolgen soll?

Auflösung.

Der gesuchte Gewinn x der Sparkasse wird ausgedrückt durch die Differenz der Endkapitalien, welche die Sparkasse am Ende des 12ten Jahres erhält — und auszahlen muss.

Zur Berechnung des Endkapitals K, welches die Sparkasse **auszahlen** muss, weiss man, dass:

das Anfangskapital $k = 1500$ *M*
der Prozentsatz $p = 3^3/_4 = 3{,}75$
die Anzahl der Jahre $n = 12$ ist.

Man hat somit nach vorstehender Formel 1):

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n \quad \text{(siehe Formel I, S. 4)}$$

die Gleichung:

$$1) \ldots \quad K = 1500 \,.\, 1{,}0375^{12} \quad \text{(Erkl. 31)}$$

Zur Berechnung des Endkapitals $\mathfrak{K}$, welches die Sparkasse **erhält**, weiss man dass:

das Anfangskapital $k = 1500$ *M*
der Prozentsatz $p = 4$
die Anzahl d. Jahre $n = 12$ und
die Zahl, welche den Bruchteil eines Jahres angibt, nach welchem die Zinsen zum Kapitale geschlagen werden, $m = 4$ ist.

Setzt man daher diese Werte in vorstehende Formel 2):

$$\mathfrak{K} = k\left(\frac{100 + \frac{p}{m}}{100}\right)^{m.n} \quad \text{(siehe Formel 3a, Seite 9)}$$

ein, so erhält man die Gleichung:

$$2) \ldots \quad \mathfrak{K} = 1500\left(\frac{100 + \frac{4}{4}}{100}\right)^{12.4}$$

Nach dem oben angeführten, ist der Sinn der anzusetzenden Bestimmungsgleichung, wenn mit x der Gewinn der Sparkasse bezeichnet wird, ausgedrückt durch:

$$3). \ldots \quad \mathfrak{K} - K = x$$

Substituiert man aus den Gleichungen 1) und 2) für $\mathfrak{K}$ und K die berechneten Werte, so erhält man:

$$4). \ x = 1500\left(\frac{100 + \frac{4}{4}}{100}\right)^{12.4} - 1500 \,.\, 1{,}0375^{12}$$

oder:

$$x = 1500\left[\left(\frac{100 + 1}{100}\right)^{48} - 1{,}0375^{12}\right]$$

$$x = 1500\,[1{,}01^{48} - 1{,}0375^{12}]$$

Hülfsrechnungen.

1). $\log 1{,}01^{48} = 48 \,.\, \log 1{,}01$

Nun ist: $\log 1{,}01 = 0{,}0043214$
. 48
345712
172856
$\log 1{,}01^{48} = 0{,}2074272$
189
83
81

mithin:
$1{,}01^{48} = 1{,}61223$

2). $\log 1{,}0375^{12} = 12 \,.\, \log 1{,}0375$

Nun ist: $\log 1{,}0375 = 0{,}0159881$

. 12

319762

159881

$\log 1{,}0375^{12} = 0{,}1918572$

421

151

mithin: 139,5

$1{,}0375^{12} = \underline{1{,}55545}$

Setzt man die in nebenstehenden Hülfsrechnungen 1 und 2) berechneten Werte für die einzelnen Summanden in der Klammer ein, so wird:

$$x = 1500\,[1{,}61223 - 1{,}55545]$$

oder:

$$x = 1500 \,.\, 0{,}05678$$

mithin:

$$x = 85{,}17.$$

Der Gewinn der Sparkasse beträgt somit nach 12 Jahren: 85 ℳ 17 pf.

Aufgabe 25. Eine Gemeinde hat von ihrer Herrschaft 20000 ℳ geborgt und ihr dafür einen Wald verpfändet, welcher jährlich einen reinen Ertrag von 1500 ℳ gewährt. Wenn nun die Herrschaft bei der Rückgabe des Waldes der Gemeinde noch 13219,5 ℳ auszahlt, die Zinseszinsen zu 5 % gerechnet; wie lange war alsdann die Herrschaft im Besitze des Waldes?

Formeln: 1) $K = k \,.\, 1{,}0p^n$

(siehe Formel I, Seite 4)

" 2) $K = \dfrac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

(siehe Formel V, Seite 22)

Auflösung.

Zur Aufstellung einer Bestimmungsgleichung aus welcher die gesuchte Anzahl n der Jahre berechnet werden kann, genügt folgende Betrachtung:

Die 20000 ℳ, welche die Gemeinde der Stadt schuldet, wachsen in den n Jahren mit Zinsen und Zinseszinsen bei 5 %, nach vorstehender Formel I an, zu:

1) . . . $K = 20000 \,.\, 1{,}05^n$

Ferner muss der Billigkeit gemäss angenommen werden, dass die Herrschaft die jährlichen reinen Erträge (je 1500 ℳ), welche der von der Gemeinde geliehene Wald abwirft, ebenfalls sofort — am **Ende** eines jeden Jahres — zu 5 % auf Zinseszinsen anlegt und der Gemeinde gutschreibt.

Setzt man in vorstehender Formel 2):

$$K = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$ (siehe Formel V, Seite 22)

für die am **Ende** eines jeden Jahres auf Zinseszinsen zu legende Summe r, den Wert 1500 und für den Prozentsatz p die Zahl 5 ein, so erhält man den künftigen Wert $\mathfrak{K}$ der Reinerträge des Waldes nach n Jahren, mittelst der Gleichung:

2) . . . $\mathfrak{K} = \dfrac{1500\,(1{,}05^n - 1)}{0{,}05}$

toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwerthungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Dieses Werk, welches durch sein **fortlaufendes** Erscheinen **stets auf der Höhe der Zeit steht,** kann Jedermann empfohlen werden — jedes Heft hat einen **reellen Wert** und bildet sozusagen ein abgeschlossenes Ganze. — Es wird mit den Jahren ein **mathematisch-naturwissenschaftliches Lexikon,** in welchem die **mannigfaltigsten, praktischsten Verwertungen — die Früchte der mathemathischen Disciplinen** — von Stufe zu Stufe aufzufinden sind.

Der Verfasser hat somit eine **gute, brauchbare und praktische mathemathische - technische - naturwissenschaftliche - 25 - Pfennig - Bibliothek** geschaffen.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart, Oktober 1881. **Die Verlagshandlung.**

Inhalts-Verzeichnis.

Am Schlusse der nachstehend verzeichneten Hefte, ausgenommen Heft 10 und 14, ist je eine Anzahl ungelöster Aufgaben angeführt. Die Auflösungen derselben sollen – analog den entsprechenden, gelösten Aufgaben — gesucht werden, wodurch bezweckt wird, dass der Studierende sich zum selbstständigen Arbeiter heranbildet. Die Lösungen dieser Aufgaben werden später in besonderen Heften zur Ausgabe gelangen.

Der Inhalt jedes Heftes erleidet nur bei Raummangel eine kleine Abänderung, resp. Kürzung.

Heft 1. Algebra: Zinseszinsrechnung. (1. Teil.)

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über Zins, Prozent, Zinsfuss, Zinsfaktor und Zinseszins-Rechnung. — Entwicklung der Haupt-Zinseszinsformel. — Aufgaben über die 4 möglichen Fälle. – Entwicklung der Formel, wenn sich ein Kapital ver-*m*-fachen soll. — Entwicklung der Formel, wenn die Zinsen nicht jährlich, sondern in kleineren Zeitabschnitten zum Kapitale geschlagen werden. — Gemischte Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 2. Planimetrie: Konstruktions-Aufgab., gelöst durch geometr. Analysis. (1. Teil.)

Inhalt: Ueber die Bezeichnungen. — Erläuternde Fragen mit Antworten über die Konstruktion planimetr. Aufgaben und über die geometrische Analysis. — Die wichtigsten Elementar-Aufgaben. — Aufgaben über das Dreieck. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 3. Stereometrie: Körperberechnungen. (1. Teil) Das Prisma.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über: die Definition, Erzeugung, Bestandteile des Prismas; — die Einteilung der Prismen; die Eigenschaften des geraden Prismas; — das Parallelepipedon. — Erläuternde Fragen mit Antworten über die Berechnung der Prismen, besonders des geraden Prismas; — Entwicklung der vorkommenden Formeln. -- Praktische Aufgaben über das gerade Prisma. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 4. Ebene Trigonometrie: Berechnungs-Aufg. (1. Teil) Das rechtwinklige Dreieck.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten, über: Die Trigonometrie im allgemeinen, — die ebene Trigonometrie, — die Winkelfunktionen. — Die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks, — allgemeine Aufgaben über die 4 mögl. Fälle. — Praktische Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 5. Physik: Berechnungs-Aufgaben. (1. Teil.) Das specifische Gewicht.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten, über die: Definition des spec. Gewichts fester, flüssiger und gasförmigen Körper, — experimentelle Bestimmung desselben, — Aufstellung einer Formel etc. — Tabellen der specifischen Gewichte einiger fester, flüssiger und gasförmiger Körper. — Anwendung des specif. Gewichtes auf praktische stereometr Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 6. Höhere Mathematik: Differential-Rechnung. (1. Teil.) Die einf. Differentiation entwick. (explizieter) Funktionen von einer unabhängig Veränderlichen.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über: Begriff und Einteilung der Funktionen, — Variabelen und Konstanten etc., nebst vielen Beispielen. — Erläuternde Fragen mit Antworten, über: Differenzenquotient, Differentiale, Differentialquotient etc. — Entwicklung des 1. Differentialquotienten explizieter Funktionen von einer unabhängig Veränderlichen. — Differentialquotient: einer Potenz, einer algebraischen Summe von Funktionen,

einer konstant. Grösse, eines Produktes, eines Bruches, einer Exponentialgrösse, einer logarithmischen Grösse, der trig. und cyklometr. Funktionen etc. — mit vielen gelösten und Anhängen von ungelösten Aufgaben.

Heft 7. Algebra: Die Proportionen. (1. Teil.)

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über Verhältnisse und Proportionen. — Die arithm. Proportionen (Fragen mit Antworten). – Die geometr. Proportionen — Lehrsätze — (Fragen mit Antworten) — Aufgaben. — Die Summen u. Differenzensätze — (Fragen mit Antworten) — Aufgaben. — Die laufenden Proportionen. — Gegebene Proport. in laufende zu verwandeln — (Fragen mit Antworten) — Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 8. Planimetrie: Konstruktions-Aufgaben. (1. Teil.)

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die Konstruktion planimetr. Aufgaben durch die algebraische Analysis. — Einfache algebr. Ausdrücke — Hülfssätze — Konstruktion der einfachen algebr. Ausdrücke — Konstruktion der vierten, dritten u. mittleren Proportionalen. — Konstruktion zusammengesetzter algebraischer Ausdrücke. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 9. Algebra: Die Reihen. (1 Teil.) Die niederen arithmet. Reihen (arithmetische Progressionen).

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die Reihen im allgemeinen. — Erläuternde Fragen mit Antworten über die: arithmet. Reihen, — Entwicklung der Formeln, Aufstellung der 20 verschied. Fälle. — Allgemeine Aufgaben über die 20 verschied Fälle. — Prakt. Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgab.

Heft 10. Planimetrie: Konstruktions-Aufgaben. Das Apollonische Berührungs- (Taktions-) Problem. (1. Teil.)

Inhalt: Vorbemerkung. — Aufstellung der 10 mögl. Fälle. — Die 10 mögl. Fälle mit vielen sich daraus ergebenden besonderen Kreiskonstruktionsaufgaben.

Heft 11. Algebra: Die Reihen. (2. Teil.) Die geometrischen Reihen.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die: geometrischen Reihen. — Entwicklung der Formeln — Aufstellung der 20 verschied. Fälle. — Allgemeine Aufgaben über die 20 verschied. Fälle. — Praktische Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 12. Stereometrie: Körperberechnungen. (2. Teil) Die Pyramide.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die: Definition, Erzeugung, Bestandteile etc. der Pyramide im allgemeinen. — Erläuternde Fragen mit Antworten über die: Berechnung der Pyramiden, besonders der geraden Pyramiden; — Entwicklung der vorkommenden Formeln. — Prakt. Aufgaben über die gerade Pyramide. — Anhang ungelöst. Aufgab.

Heft 13. Stereometrie: Körperberechnungen. (3. Teil.) Der Pyramidenstumpf.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die Definition, Eigenschaften, Bestandteile etc. des Pyramidenstumpfes im allgemeinen. — Erläut. Fragen mit Antworten über die: Berechnung des Pyramidenstumpfe[s] — besonders d. geraden Pyramidenstumpfe[s] — Entwicklung der vorkommenden Formeln — Prakt. Aufgaben über den geraden Pyramidenstumpf. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 14. Planimetrie: Konstruktions-Aufgaben. Das Apollonische Berührungs- (Taktions) Problem. (2. Teil.)

Heft 15. Trigonometrie: Berechnungs-Aufg[aben] (2. Teil.) Das gleichschenklige Dreieck.

Inhalt: Erläut. Fragen mit Antworten über die Berechnung des gleichschenklige[n] Dreiecks. — Aufgaben über die 5 mögl. Fälle[.] Praktische Aufgaben. — Anhang ungelöste[r] Aufgaben.

Heft 16. Algebra: Zinseszinsrechg. (2. Teil.)

Inhalt: Entwicklung der Zinseszinsformeln, wenn am Ende eines jeden Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital u[m] eine gewisse Summe vermehrt wird. — Praktische Aufgaben. — Entwicklung de[r] Zinseszinsformeln, wenn am Ende eine[s] jeden Jahres das auf Zinseszinsen stehend[e] Kapital um eine gewisse Summe vermindert wird. — Praktische Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 17. Algebra: Die Reihen. (3. Teil.)

Inhalt: Gemischte praktische Aufgabe[n] über die arithmetischen und geometrische[n] Reihen.

Heft 18. Stereometrie: Körperberechnungen. (4. Teil.) Der Cylinder.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über den Cylinder im allgemeinen. — Entwicklung der Formeln für Mantel, Oberfläche und Volumen des Cylinders. — Praktische Aufgaben.

Heft 19. Stereometrie: Körperberechnungen. (5. Teil.) Der Kegel.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über den Kegel im allgemeinen. — Entwicklung der Formeln für Mantel, Oberfläche und Volumen des geraden Kegels. — Praktische Aufgaben.

Heft 20. Stereometrie: Körperberechnungen. (6. Teil.) Der Kegelstumpf.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über den Kegelstumpf im allgemeinen — Entwicklung der Formeln für Mantel, Oberfläche und Volumen des geraden Kegelstumpfes. — Praktische Aufgaben.

☛ **Inhalt von Heft 21—40 siehe Heft 36.**

Buchdruckerei von Hammer & Liebich in Stuttgart.



Vollständig gelöste
Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Algebra.
Zinseszins-Rechnung.

3. Teil.

Fortsetzung von Heft 35. — Seite 65—80.

Inhalt:

Gemischte praktische Aufgaben, auch über Schuldentilgungen, Amortisationen, Terminalzahlungen etc.

Stuttgart 1882.

Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.
D[ie] einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird

..s auf der Rückseite abgedruckte Inhalts-Verzeichniss der nächsten Hefte wird gefälliger

Henkel, Prof. Dr., Grundriss der allgemeinen Warenkunde. Für das Selbststudium wie für den Unterricht an Lehranstalten. 3. Auflage. Neu bearb. von Prof. Dr. Feichtinger an der kgl. Industrieschule in München. 8⁰. (XII. 460 S.) ℳ 5. —

Andree-Deckert, Handels- und Verkehrsgeographie. Lehrbuch für Handelsschulen und verwandte Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht bearbeitet von Emil Deckert. Zugleich zweite Auflage von Richard Andree's Handels- und Verkehrsgeographie. (VII. 430 Seiten.) ℳ 4. —

Brude, Adolf, Prof., Das Zeichnen der Stereometrie. Als Vorschule zur darstellenden Geometrie und zum Fachzeichnen für Lehranstalten wie zum Selbstunterricht. 28 Tafeln mit Text. (41 S.) In Carton. hoch 4. ℳ 6. —

Brude, Adolf, Prof., 30 Stereoskopische Bilder aus der Stereometrie. Bezogen auf den Kubus und entnommen dem Werke desselben Verfassers: „Das Zeichnen der Stereometrie". In Futteral. ℳ 3. —

Müller, G. Louis, Rundschrift (Ronde). Sechzehn Blätter Schreibvorlagen. Preisgekrönt. Achte Auflage. In Carton. ℳ 1. —

Müller, G. L. und Wilh. Röhrich, 40 Blätter Schreibvorlagen in Geschäftsformularen und Briefen. Zum Gebrauche an Handels-, Gewerbe- und Fortbildungsschulen, für Zöglinge des Handelsstandes, sowie als Mustervorlagen für Lithographen etc. Im Anschluss an die Musterstücke aus dem schriftlichen Handelsverkehre von Wilh. Röhrich. Zweiter Abdruck. 4. (40 Blätter und 1 Bogen Text.) In Mappe. ℳ 4. —

Bopp, Prof., Grosse Wandtafel des metrischen Systems. Als Anschauungsmittel. In Farbendruck und Colorit. Nebst 1 Bogen Text. In Mappe. ℳ 3. — Aufzug auf Leinen, in Mappe ℳ 2. — mit Stäben und lackirt ℳ 4. —

Leypold, F., k. w. Reg.-Rath a. D., Mineralogische Tafeln. Anleitung zur Bestimmung der Mineralien. 8⁰. (128 S.) ℳ 3. —

Seubert, Karl, Prof. Dr., und Hofrath Prof. Dr. M. Seubert, Handbuch der allgemeinen Warenkunde für das Selbststudium wie für den öffentlichen Unterricht. Mit Holzschnitten. 2. Auflage. Erster Band: Unorganische Warenkunde. Zweiter Band: Organische Warenkunde. 1882. Erscheint in Lieferungen à 1 Mark, vollständig in ca. 10 Lieferungen.

Lexikon der Handelskorrespondenz in neun Sprachen. Deutsch, Holländisch, Englisch, Schwedisch, Französisch, Italienisch, Spanisch, Portugiesisch, Russisch. Mit Beifügung einer vollständigen und ausführlichen Phraseologie zur unmittelbaren Verwendung für die Korrespondenz unter Berücksichtigung der Bedürfnisse auch der in fremden Sprachen weniger Geübten. Nebst Anhang: Wörterbuch der Waren-, geographischen-, Zahlen-, Münz-, Mass- und Gewichts-Namen; technischer und im Eisenbahn-, wie im allgemeinen Handelsverkehr gebräuchlicher Ausdrücke. Briefanfänge und Briefschlüsse; Telegramme, Formulare etc. Bearbeitet von A. Antonoff, G. Bienemann, J. Bos jz., M. W. Brasch, G. Cattaneo, Rud. Ehrenberg, L. F. Huber, C. Lobenhofer, M. Scheck. - **Erster Band:** Deutsch, Französisch, Italienisch, Spanisch, Portugiesisch. **Zweiter Band:** Deutsch, Englisch, Holländisch, Schwedisch, Russisch. Pro Lieferung 60 ₰, vollständig in ca. 25 Lieferungen.

Aufgabe 33. Ein Wucherer A wollte Jemanden, der erst nach 3 Jahren zahlungsfähig ist und früher weder Kapital noch Zinsen zahlen kann, eine gewisse Summe auf so lange nur zu sehr hohen, aber einfachen Zinsen leihen. Ein anderer Wucherer B wollte nur $^4/_5$ mal so viel Prozente, aber Zins von Zins haben. Da der Schuldner nun dem letzteren nach Verlauf von drei Jahren ebensoviel wiedergeben musste, als dem A, so fragt es sich, wieviel Prozent verlangte Jeder?

Erkl. 41. Bei **einfacher Zinsberechnung** wachsen

100 ℳ. in 1 Jahr bei $x\,^0/_0$ an, zu $100 + x$
100 „ „ 2 Jahren „ $x\,^0/_0$ „ „ $100 + 2x$
100 „ „ 3 „ „ $x\,^0/_0$ „ „ $100 + 3x$

Hiernach wächst

1 ℳ. in 3 Jahren bei $x\,^0/_0$ an, „ $\frac{100+3x}{100}$

folglich wachsen

k ℳ. in 3 Jahren bei $x\,^0/_0$ an, „ $\frac{100+3x}{100}\cdot k$

(vergl. das Kapitel, welches über **einfache Zinsrechnung** handelt).

Formel: $K = k\cdot\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$

Auflösung.

Zwischen den Angeboten, welche die beiden Wucherer A und B dem Schuldner machen, besteht die Beziehung, dass die Endwerte K und K_1 derselben nach 3 Jahren einander gleich sind und hierin besteht der Sinn der anzusetzenden Bestimmungsgleichung:

a). . . . . $K = K_1$

Bezeichnet man das Kapital, welches sich der Schuldner bei einem oder dem anderen Wucherer leihen will mit k und den gesuchten Prozentsatz, welchen der erste der Wucherer, nämlich der Wucherer A bei einfacher Zinsberechnung beansprucht, mit x, so hat man für die Summe K, welche der Schuldner nach 3 Jahren dem Wucherer A zu zahlen hat, die Gleichung:

b). . . . $K = \frac{100+3x}{100}\cdot k$ (siehe Erkl. 41)

Da ferner der gesuchte Prozentsatz, welchen sich der Wucherer A bedungen hat, mit x bezeichnet wurde, so ist der Aufgabe entsprechend der Prozentsatz, welchen sich der Wucherer B ausbedingt $= \frac{4}{5}x$ und da derselbe **Zinseszinsen** beansprucht, so hat man mit Hülfe vorstehender Formel:

$$K = k\cdot\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$$ (s. Formel I, Seite 4)

für die Summe K_1, welche der Schuldner dem Wucherer B nach 3 Jahren zu zahlen hat:

c). . . . $K_1 = k\left(\frac{100+\frac{4}{5}x}{100}\right)^3$

Setzt man die Werte für K und K_1 aus den Gleichungen b). und c). in die Gleichung a). ein, so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$1)\ldots \frac{100+3x}{100}\cdot k = k\left(\frac{100+\frac{4}{5}x}{100}\right)^3$$

Diese Gleichung durch k dividiert und weiter reduziert, gibt der Reihe nach:

$$\frac{100+3x}{100} = \left(\frac{100+\frac{4}{5}x}{100}\right)^3$$

$$1+\frac{3}{100}x = \left(1+\frac{4}{500}x\right)^3$$

$$1+\frac{3}{100}x = \left(1+\frac{x}{125}\right)^3$$

$$1+\frac{3}{100}x = 1+\frac{3x}{125}+\frac{3x^2}{125^2}+\frac{x^3}{125^3}$$

(siehe Erkl. 42)

$$\frac{3x}{100} = \frac{3x}{125}+\frac{3x^2}{125^2}+\frac{x^3}{125^3}$$

Glied für Glied dieser Gleichung durch x dividiert, gibt:

$$\frac{3}{100} = \frac{3}{125}+\frac{3x}{125^2}+\frac{x^2}{125^3}$$

oder:

$$\frac{x^2}{125^3}+\frac{3x}{125^2} = \frac{3}{100}-\frac{3}{125}$$

$$\frac{x^2}{125^3}+\frac{3x}{125^2} = \frac{3}{500} \quad \text{(s. Erkl. 43)}$$

Den Koeffizienten von x^2 entfernt, gibt:

$$x^2+\frac{3x\,.\,125^3}{125^2} = \frac{3\cdot 125^3}{500} \quad \text{oder:}$$

$$x^2+3\,.\,125\,.\,x = \frac{3\cdot 125^2}{4} \quad \text{(s. Erkl. 44)}$$

Löst man nunmehr diese unrein quadratische Gleichung auf, so erhält man:

$$x = -\frac{3\cdot 125}{2}+\sqrt{3\cdot 125^2}$$

(siehe Erkl. 45)

oder:

Erkl. 42. Nach der Formel:

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

kann man für $\left(1+\frac{x}{125}\right)^3$ schreiben:

$$\left(1+\frac{x}{125}\right)^3 = 1^3+3\cdot 1^2\cdot\frac{x}{125}+ 3\cdot 1\cdot\frac{x^2}{125^2}+\frac{x^3}{125^3}$$

oder: $\left(1+\frac{x}{125}\right)^3 = 1+\frac{3x}{125}+\frac{3x^2}{125^2}+\frac{x^3}{125^3}$

Erkl. 43. $\frac{3}{100}-\frac{3}{125} = \frac{15}{500}-\frac{12}{500} = \frac{3}{500}$

Erkl. 44. $\frac{3\,.\,125^3}{500} = \frac{3\,.\,125\,.\,125^2}{500} = \frac{3\,.\,125^2}{4}$

Erkl. 45. Die unrein quadrat. Gleichung:

$$x^2+3\,.\,125x = \frac{3\,.\,125^2}{4}$$

wird wie folgt aufgelöst:

Beiderseits den halben Koeffizienten von x, nämlich $\frac{3\,.\,125}{2}$, im Quadrat addiert, gibt:

$$x^2+3\,.\,125x+\left(\frac{3\,.\,125}{2}\right)^2 = \frac{3\,.\,125^2}{4}+\left(\frac{3\,.\,125}{2}\right)^2$$

oder:

$$\left(x+\frac{3\,.\,125}{2}\right)^2 = \frac{3\,.\,125^2}{4}+\frac{9\,.\,125^2}{4}$$

$$x+\frac{3\,.\,125}{2} = \pm\sqrt{(3+9)\cdot\frac{125^2}{4}}$$

$$x = -\frac{3\,.\,125}{2}\pm\sqrt{\frac{12\,.\,125^2}{4}}$$

$$x = -\frac{3\,.\,125}{2}+\sqrt{3\,.\,125^2}$$

Das negative Vorzeichen bleibt, als der Aufgabe nicht entsprechend, weg.

(Vergl. das Kapitel: Die quadrat. Gleichungen.)

Hülfsrechnungen.

1). $\sqrt{3} = 1{,}732\ldots$

```
 1
───
2 200
  189
────
34|1100
   1029
────
346|7100
    6924
────
    ....
    ....
```

2). $1{,}732 \cdot 125$

```
   8660
  3464
 1732
──────
216,500
```

$$x = -\frac{375}{2} + 125\sqrt{3}$$

$$x = -187{,}5 + 125 \cdot 1{,}732 \text{ (Hülfsrech. 1)}$$

$$x = -187{,}5 + 216{,}5 \text{ (Hülfsrechn. 2)}$$

mithin:

$$x = 29$$

Der Wucherer A verlangte somit $x = 29\,\%$ einfache Zinsen, während der Wucherer B, dem Sinne der Aufgabe entsprechend:

$$\frac{4}{5}x = \frac{4}{5} \cdot 29 = \frac{116}{5} = 23\tfrac{1}{5}\,\%$$

Zinseszinsen beanspruchte.

Aufgabe 34. Eine 4prozentige Anleihe von 300000 Mark soll durch jährliche Ratenzahlungen von je 30045 Mark getilgt werden. In wieviel Jahren kann dies geschehen?

Formel: $K = k \cdot 1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung.

Bei der Berechnung der Anzahl der Jahren nach welchen die Anleihe unter den gegebenen Bedingungen getilgt werden kann, hat man zu beachten, dass ein Kapital $k = 300000$ ℳ zu 4 % auf Zinseszinsen steht und dass von demselben am Ende eines jeden Jahres die Summe $r = 30045$ ℳ weggenommen (abgetragen) wird, und zwar so lange, bis der künftige Wert K jenes Kapitals = Null geworden ist. Hiernach kommt vorstehende Formel:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

(siehe Formel VI^a, Seite 26, auch Formel VI)

in Anwendung. In derselben ist:

das Anfangskapital $k = 300000$ ℳ
der künftige Wert $K = 0$
die jährliche Verminderung
(Tilgung) $r = 30045$ ℳ
der Prozentsatz $p = 4$ und
die Anzahl d. Jahre $n = x$

Substituiert man diese Werte in vorstehende Formel, so erhält man:

$$0 = 300000 \cdot 1{,}04^x - \frac{30045\,(1{,}04^x - 1)}{0{,}04}$$

Um hieraus x berechnen zu können,

muss man diese Gleichung zunächst nach der Potenz $1{,}04^x$, wie folgt auflösen:

Die ganze Gleichung mit 0,04 multipliziert und die Klammer aufgelöst, gibt:

$$0 = 300000 \,.\, 1{,}04^x \,.\, 0{,}04 - 30045 \,.\, 1{,}04^x + 30045$$

oder:

$$30045 \,.\, 1{,}04^x - 300000 \,.\, 0{,}04 \,.\, 1{,}04^x = 30045$$

$$1{,}04^x (30045 - 300000 \,.\, 0{,}04) = 30045$$

und hieraus erhält man zunächst:

$$1{,}04^x = \frac{30045}{30045 - 300000 \,.\, 0{,}04} \text{ oder}$$

nach nebenstehender Hülfsrechnung 1):

$$1{,}04^x = \frac{30045}{18045}$$ Diese Exponentialgleichung logarithmiert, gibt:

$$x \,.\, log\, 1{,}04 = log\, 30045 - log\, 18045$$

oder:

$$x = \frac{log\, 30045 - log\, 18045}{log\, 1{,}04}$$

$$x = \frac{4{,}4777722 - 4{,}2563569}{0{,}0170333}$$

$$x = \frac{0{,}2214153}{0{,}0170333}$$

Hieraus erhält man nach nebenstehender Hülfsrechnung 2). für die gesuchte Anzahl der Jahre nach welchen die Anleihe getilgt werden kann:

$x = 13$ Jahre.

1). $\frac{30045}{30045 - 300000 \,.\, 0{,}04} = \frac{30045}{30045 - 12000} = \frac{30045}{18045}$

2). $\frac{0{,}2214153}{0{,}0170333} = \frac{2214153}{170333}$

```
170333 | 2214153 | 12,99
         170333
         ------
          510823
          340666
          -------
          1701570
          1532997
          --------
          16857300
```

$\frac{2214153}{170333} = 12{,}99$ oder **abgerundet** $= 13$.

— vergleiche die Anmerkung 23, Seite 57. —

Aufgabe 35. Man soll die Zinsen und Zinseszinsen berechnen, welche ein Kapital von 7200 Mark zu $4\frac{7}{8}$ % in $12\frac{1}{4}$ Jahr ergeben.

Formel: $K = k \,.\, 1{,}0p^n \left(1 + \frac{0{,}0p}{m}\right)$

Auflösung.

Bezeichnet man die gesuchten Zinsen und Zinseszinsen, welche das Kapital von 7200 ℳ nach $12\frac{1}{4}$ Jahren zu $4\frac{7}{8}$ % ergeben mit x und den künftigen Wert dieses Kapitals nach den $12\frac{1}{4}$ Jahren mit K, so ergibt sich die gesuchte Grösse x aus der Gleichung:

1). . . . $x = K - 7200$

Ekl. 46. Da in der Aufgabe $p = 4\frac{7}{8}$ ist, so setze man:

$$1{,}0p = \frac{100+p}{100}, \text{ woraus man:}$$

$$1{,}0p = \frac{100+4\frac{7}{8}}{100} = \frac{100+\frac{39}{8}}{100} = \frac{\frac{800+39}{8}}{100}$$

oder:

1). . . . . $1{,}0p = \frac{839}{800}$ erhält.

Man hätte auch $4\frac{7}{8}$ in den Decimalbruch 4,875 verwandeln können, wonach man:

2). . . . . $1{,}0p = 1{,}04875$ erhalten hätte.

Dies gibt jedoch bei der weiteren logarithmischen Rechnung ein weniger genaues Resultat, als dasjenige, welches man erhält, wenn für $1{,}0p$ den Wert aus Gleichung 1). in Rechnung bringt.

Da ferner:

$$0{,}0p = \frac{p}{100} = \frac{4\frac{7}{8}}{100} = \frac{\frac{39}{8}}{100} \text{ ist,}$$

so erhält man:

3). . . . . $0{,}0p = \frac{39}{800}$

Erkl. 47. Man könnte den Bruch $\frac{7200 \,.\, 3239}{3200}$ noch abkürzen, dies ist jedoch bei der logarithmischen Ausrechnung ohne besonderen Vorteil.

Da nun die Anzahl der Jahre, welche angibt, wie lange das Kapital von 7200 Mark Zinsen und Zinseszinsen trägt, eine gebrochene (gemischte) Zahl ist, so findet man den künftigen Wert K mittelst vorstehender Formel:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n \left(1 + \frac{0{,}0p}{m}\right)$$

(siehe Formel XVI, Seite 41.)

Setzt man in diese Formel, für: das auf Zinsenzinsen steh. Kapital $k = 2700$ ℳ, den Prozentsatz $p = 4\frac{7}{8}$, bezw. für $1{,}0p = \frac{839}{800}$ und für $0{,}0p = \frac{39}{800}$ (s. Gleich. 1). u. 3). in der Erkl. 46), für die Anzahl n der ganzen Jahre $= 12$ und endlich für den Bruchteil m des letzten Jahres $= 4$ ein, so erhält man:

$$K = 7200 \cdot \left(\frac{839}{800}\right)^{12} \left(1 + \frac{\frac{39}{800}}{4}\right)$$

oder:

$$K = 7200 \left(\frac{839}{800}\right)^{12} \left(1 + \frac{39}{3200}\right)$$

$$K = 7200 \left(\frac{839}{800}\right)^{12} \cdot \frac{3200+39}{3200}$$

$$K = 7200 \left(\frac{839}{800}\right)^{12} \cdot \frac{3239}{3200}$$

$$K = \left(\frac{839}{800}\right)^{12} \cdot \frac{7200 \,.\, 3239}{3200} \text{ (s. Erkl. 47).}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log K = 12 (\log 839 - \log 800) + \log 7200 + \log 3239 - \log 3200$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
\log 839 &= 2{,}9237620 \\
-\log 800 &= -2{,}9030900 \\
&\overline{0{,}0206720} \\
&\phantom{=-0{,}02067}.\,12 \\
&\overline{\phantom{0{,}}413440} \\
&\phantom{=-0{,}}206720 \\
12(\log 839 - \log 800) &= \overline{0{,}2480640} \\
+\log 7200 &= 3{,}8573325 \\
+\log 3239 &= 3{,}5104109 \\
&\overline{7{,}6158074} \\
-\log 3200 &= -3{,}5051500 \\
\log K &= \overline{4{,}1106574} \\
&\phantom{=-4{,}110}6570 \\
&\phantom{=-4{,}1106}\overline{4}
\end{aligned}$$

mithin ist:

2). . . . $K = 12902$ Mark

Für die gesuchten Zinsen und Zinseszinsen x erhält man aus den Gleichungen 1). und 2).:

$$x = 12902 - 7200 \text{ oder:}$$

$$x = 5702 \text{ Mark.}$$

Aufgabe 36. Jemand stellt gegen ein Darlehen von 2000 Mark auf 3 Jahre einen Schuldschein von 2660 Mark aus. Wieviel % Zinseszinsen wurde hierbei in Anrechnung gebracht?

Hülfsrechnung.

$$\log 1{,}0x = \frac{1}{3}(\log 2660 - 2000)$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 2660 &= 3{,}4248816 \\ -\log 2000 &= -3{,}3010300 \\ &0{,}1238516 \\ &\phantom{=-0{,}123851}\cdot\tfrac{1}{3} \\ \log 1{,}0x &= 0{,}0412839 \\ &\phantom{=-0{,}041}2742 \\ &\phantom{=-0{,}04128}97 \end{aligned}$$

mithin ist:

$1{,}0x = \underline{1{,}0997}$

Formel: $K = k\,.\,1{,}0p^n$

Auflösung.

Das Darlehen von 2000 Mark ist ein 3 Jahre lang auf Zinseszinsen zu x % ausgeliehenes Kapital, dessen Endwert mit 2660 Mark bekannt ist.

Unter Benutzung vorstehender Formel:

$$K = k\,.\,1{,}0p^n$$

(siehe Formel Ia, Seite 4)

erhält man:

$$2660 = 2000\,.\,1{,}0x^3 \text{ oder:}$$

$$1{,}0x^3 = \frac{2660}{2000}$$

$$1{,}0x = \sqrt[3]{\frac{2660}{2000}}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log 1{,}0x = \frac{1}{3}[\log 2660 - \log 2000]$$

Nach nebenstehender Hülfsrechnung erhält man hieraus zunächst:

$$1{,}0x = 1{,}0997$$

Da nun: $1{,}0x = \frac{100 + x}{100}$ ist, so erhält man aus:

$$\frac{100 + x}{100} = 1{,}0997$$

$$x = 100\,.\,1{,}0997 - 100 \text{ oder:}$$

$$x = 109{,}97 - 100 = 9{,}97$$

Das Darlehen war somit zu 9,97 oder abgerundet zu 10 % auf Zinzeszinsen ausgeliehen.

Aufgabe 37. Für eine nach 10 Jahren zahlbare Summe erhält man bei einem Abzug (Diskont) von $3\frac{3}{4}$ % Zinseszinsen die Barsumme von 20000 Mark, wie hoch beläuft sich jene Summe?

Formel: $K = k \cdot 1{,}0p^n$

Auflösung.

Die nach 10 Jahren zahlbare Summe x muss gleich der erhaltenen Barsumme von 20000 Mark plus den Zinseszinsen sein, welche diese 20000 Mark zu $3\frac{3}{4}$ % nach Ablauf von 10 Jahren bringen und welche in Abzug gebracht wurden (Leibnitz'sches Interusurium, siehe Erkl. 12, Seite 14).

Denkt man sich die erhaltene Barsumme von 20000 ℳ zu $3\frac{3}{4}$ % 10 Jahre lang auf Zinseszinsen ausgeliehen, so erhält man jene Barsumme plus den Zinseszinsen zu $3\frac{3}{4}$ %, nämlich die gesuchte nach 10 Jahren zahlbare Summe x.

Setzt man daher in vorstehender Formel:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n$$

(siehe Formel Ia, Seite 4)

$K = x$
$k = 20000$
$p = 3\frac{3}{4}$, bezw. $1{,}0p = 1{,}0375$ (s. Erkl. 48)
und $n = 10$

so erhält man:

$$x = 20000 \cdot 1{,}0375^{10}$$

und hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hülfsrechnung für die nach 10 Jahren zahlbare Summe:

$x = 28900{,}87$ oder abgerundet:

$x = 28900$ Mark.

Erkl. 48. Es ist:

$$1{,}0p = \frac{100+p}{100} = \frac{100+3\frac{3}{4}}{100}$$

oder:

$$1{,}0p = \frac{100+3{,}75}{100} = \frac{103{,}75}{100}$$

mithin:

$$\underline{1{,}0p = 1{,}0375}$$

Hülfsrechnung.

$log\, x = log\, 200000 + 10 \cdot log\, 1{,}0375$

Nun ist: $log\, 1{,}0375 = 0{,}0159881$
$\cdot\, 10$
$0{,}1598810$
$+ log\, 20000 = 4{,}3010300$
$log\, x = 4{,}4609110$
8978
132
120,8
11,2
10,5

mithin:
$\underline{x = 28900{,}87}$

Aufgabe 38. Ein Beamter muss bei seiner ersten Anstellung eine Kaution von 3600 Mark stellen. Er leiht sich dieses Geld und verspricht, da er erst im 3ten Jahre zahlungsfähig wird, jährlich eine solche Summe abzutragen, dass seine Schuld nach 7 Jahren getilgt ist. Wie hoch beläuft sich eine solche abzutragende Summe, wenn 6 % Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden?

Formeln:

1). $K = k \cdot 1{,}0p^n$

2). $K = k \cdot 1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

Auflösung.

Da der Beamte erst im 3ten Jahre anfängt zahlungsfähig zu werden, so sind die von ihm geliehenen 3600 Mark während den ersten 2 Jahren, nach vorstehender Formel 1).:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n$$

(siehe Formel Ia, Seite 4)

angewachsen zu:

1). . . . . . . $K = 3600 \cdot 1{,}06^2$

Dieses Kapital $3600 \cdot 1{,}06^2$ will er nun in 5 Jahren (siehe Erkl. 49), indem er am Ende eines jeden Jahres eine Summe x abträgt, tilgen. Zur Berechnung dieser Summe x kommt vorstehende Formel 2).:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n - \frac{r \cdot (1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

(siehe Formel VIa, Seite 26)

in Anwendung. In derselben bedeutet:

K den künftigen Wert der Schuld, welche getilgt, nämlich = 0 werden soll,

k das Anfangskapital von welchem am Ende eines jeden Jahres eine Summe r, in dieser Aufgabe $= x$, weggenommen werden soll und welches nach Gleichung 1). $= 3600 \cdot 1{,}06^2$ M. beträgt;

ferner bedeutet:

p den Prozentsatz, derselbe ist = 6, und

n die Anzahl der Jahre, welche angibt, wie lange das Kapital $3600 \cdot 1{,}06^2$ um die Summe r $(= x)$ vermindert wird und in dieser Aufgabe = 5 ist.

Mit Rücksicht dieser Werte geht vorstehende Formel 2). über in:

$$0 = 3600 \cdot 1{,}06^2 \cdot 1{,}06^5 - \frac{x \cdot (1{,}06^5 - 1)}{0{,}06}$$

Diese Gleichung nach x aufgelöst und reduziert, gibt der Reihe nach:

$$\frac{x \cdot (1{,}06^5 - 1)}{0{,}06} = 3600 \cdot 1{,}06^7$$

$$x = \frac{3600 \cdot 1{,}06^7 \cdot 0{,}06}{1{,}06^5 - 1}$$

$$x = \frac{3600 \cdot 1{,}06^7 \cdot 0{,}06}{1{,}3382 - 1}$$ (siehe Hülfsrechnung 1)

$$x = \frac{3600 \cdot 1{,}06^7 \cdot 0{,}06}{0{,}3382}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log x = \log 3600 + 7 \cdot \log 1{,}06 + \log 0{,}06 - \log 0{,}3382$$

Hieraus erhält man nach nebenstehender Hülfsrechnung 2). für die gesuchte Summe x, welche der Beamte je am Ende der letzten 5 Jahre abtragen muss:

x = 960 Mark 33 pf.

Erkl. 49. Da der Beamte in 7 Jahren seine Schuld tilgen will, aber während den zwei ersten Jahren nichts bezahlen kann, so bleiben nur noch fünf Jahre übrig in welchen er seine Schuld abtragen kann.

Hülfsrechnungen.

1). $\log 1{,}06^5 = 5 \cdot \log 1{,}06$

Nun ist: $\log 1{,}06 = 0{,}0253059$
$\cdot 5$

$\log 1{,}06^5 = 0{,}1265295$
5210
85

mithin:
$1{,}06^5 = \underline{1{,}3382}$

2). $\log x = \log 3600 + 7 \cdot \log 1{,}06 + \log 0{,}06 - \log 0{,}3382$

Nun ist: $\log 1{,}06 = 0{,}0253059$
$\cdot 7$

$7 \cdot \log 1{,}06 = 0{,}1771413$
$+ \log 3600 = 3{,}5563025$
$+ \log 0{,}06 = 0{,}7781513 - 2$

$4{,}5115951 - 2$
$- \log 0{,}3382 = \pm 0{,}5291736 - 1$
$+$

$\log x = 3{,}9824215 - 1$

oder: $\log x = 2{,}9824215$
4205
10

mithin ist:
$x = \underline{960{,}33}$ Mark.

Aufgabe 39. Es muss Jemand 12 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres die Summe von 2000 Frank bezahlen. Diese jährlichen Zahlungen sollen durch eine einmalige Zahlung nach 4 Jahren abgetragen werden; welches ist diese zu zahlende Summe, wenn 5 % Zinseszinsen in Anrechnung gebracht werden?

Formeln: 1). $K = \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

2). $K = k \cdot 1{,}0p^n$

Auflösung.

Zur Berechnung der gesuchten Summe x, welche nach 4 Jahren statt den am Ende eines jeden Jahres 12 Jahre lang zu zahlenden Summen von je 2000 Frank bezahlt werden kann, ohne dass hierdurch dem Gläubiger noch dem Schuldner Schaden erwächst, beachte man in dieser Aufgabe (siehe die Erkl. 50), dass der **künftige Wert** K der am Ende eines jeden Jahres zu zahlenden Summe nach Ablauf von 12 Jahren **gleich dem künftigen Werte** K_1 der nach 4 Jahren zu zahlenden Summe x nach Ablauf von 12 Jahren sein muss, somit ist der Sinn der anzusetzenden Bestimmungsgleichung ausgedrückt, durch:

1). . . . . $K = K_1$

Den künftigen Wert K der am Ende eines jeden Jahres zu zahlenden Summen von je 2000 Frank findet man mittelst vorstehender Formel:

a). . . . $K = \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$

(siehe Formel V, Seite 22)

wenn man in derselben $r = 2000$, $p = 5$ und $n = 12$ setzt, aus der Gleichung:

2). . . . $K = \frac{2000(1{,}05^{12} - 1)}{0{,}05}$

Den künftigen Wert K_1 der nach 4 Jahren zahlbaren Summe x findet man mittelst der vorstehenden Formel:

b). . . . . $K = k \cdot 1{,}0p^n$

(siehe Formel I^a, Seite 4)

wenn man in derselben $K = K_1$, $k = x$, $p = 5$ und $n = 12 - 4 = 8$ (denn das Kapital x trägt dem Gläubiger bis Ende des 12ten Jahres nur 8 Jahre lang Zinseszinsen, da er es erst nach 4 Jahren erhält) setzt, aus der Gleichung:

3). . . . . $K_1 = x \cdot 1{,}05^8$

Erkl. 50. Man hätte auch, analog der Aufgabe 32, Seite 62, und der Erkl. 40, **die Summe der baren Werte** der nach den Terminen von 1, 2, 3, 4 . . . 12 Jahren zu zahlenden Geldsummen von je 2000 Frank **gleich dem baren Werte** der nach 4 Jahren zu zahlenden Summe x setzen können, das Resultat blieb sich hierbei dasselbe.

Die nebenstehende Auflösung ist für diese Aufgabe jedoch einfacher.

Erkl. 51. Aus den Gleichungen 1)., a). und b). in nebenstehender Auflösung erhält man:

$$\frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p} = k \cdot 1{,}0p^n$$

oder:

I. . . . $k = \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^n}$

als **allgemeine** Lösung der Aufgabe, welche bei ähnlichen Aufgaben als Formel benutzt werden kann.

Aus den Gleichungen 1)., 2). und 3). folgt die Gleichung:

$$\frac{2000(1,05^{12}-1)}{0,05} = x \,.\, 1,05^8$$

und hieraus erhält man:

$$x = \frac{2000(1,05^{12}-1)}{0,05 \,.\, 1,05^8}$$ (siehe Erkl. 51)

oder nach nebenstehender Hülfsrechn. 1:

$$x = \frac{2000 \,.\, 0,79586}{0,05 \,.\, 1,05^8}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log x = \log 2000 + \log 0,79586 - (\log 0,05 + \log 1,05^8)$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rcl} \log 2000 & = & 3,3010300 \\ \log 0,79586 & = & 0,9008367-1 \\ \hline & & 4,2018667-1 \\ -(\log 0,05+\log 1,05^8) & = & +0,8684844-2 \\ & & - \quad + \\ \hline \log x & = & 3,3333823+1 \end{array}$$

(Hülfsrechn. 2)

$$\begin{array}{rcl} \text{oder: } \log x & = & 4,3333823 \\ & & 667 \\ \hline & & 156 \end{array}$$

mithin ist die gesuchte Summe:

$x = 21546,8$ oder abgerundet:
$= 21547$ Frank.

Hülfsrechnungen.

1). $\log 1,05^{12} = 12 \,.\, \log 1,05$

$$\begin{array}{rcl} \text{Nun ist: } \log 1,05 & = & 0,0211893 \\ & & .12 \\ \hline & & 423786 \\ & & 211893 \\ \hline \log 1,05^{12} & = & 0,2542716 \\ & & 2580 \\ \hline & & 136 \\ & & 145 \end{array}$$

mithin ist:

$1,05^{12} = 1,79586$

und $1,05^{12} - 1 = 1,79586 - 1 = 0,79586$

2). $-(\log 0,05 + \log 1,05^8) = -(0,8684844-2)$

$$\begin{array}{rcl} \text{denn: } \log 1,05 & = & 0,0211893 \\ & & .8 \\ \hline \log 1,05^8 & = & 0,1695144 \\ +\log 0,05 & = & +0,6989700-2 \\ \hline \log 0,05+\log 1,05^8 & = & 0,8684844-2 \end{array}$$

Aufgabe 40. Ein Kaufmann hat einem Fabrikanten drei Wechsel ausgestellt; den einen zu 600 Mark zahlbar in 4 Monaten; den zweiten zu 1500 Mark zahlbar in 8 Monaten, den dritten von 700 Mark zahlbar in 10 Monaten. Er wünscht diese drei Wechsel durch einen einzigen mit der Verfallzeit von einem Jahr zu ersetzen. Welches wird der Betrag dieses Wechsels sein, wenn $4\frac{1}{2}$ % Zinseszinsen gerechnet werden?

Auflösung.

Damit weder dem Kaufmann, noch dem Fabrikanten Schaden erwächst, muss, analog wie in der Aufgabe 32, angenommen werden, dass die **Summe der Barwerte** y, z und u der drei ausgestellten Wechsel **gleich dem Barwerte** v

des Wechsels ist, dessen Betrag x berechnet werden soll.

Man hat hiernach die Gleichung:

1). . . . $y + z + u = v$

Um nun die **Barwerte** dieser Wechsel, z. B. den Barwert y des nach 4 Monaten zahlbaren ersten Wechsels von 600 Mark zu finden, stelle man sich die Frage:

„Welche Summe y wächst in 4 Monaten bei $4\frac{1}{2}$ % zu 600 Mark an?"

Zur Lösung dieser Frage beachte man, dass: 100 ℳ bei $4\frac{1}{2}$ % in 1 Jahr anwachsen, zu $100 + 4\frac{1}{2}$, mithin wachsen nach der Anmerkung 19, Seite 41, und nach der Erkl. 7, Seite 10, diese 100 ℳ bei $4\frac{1}{2}$ % in 4 Monaten, bezw. in $\frac{1}{3}$ Jahr (Erkl. 52) an, zu:

$$100 + \frac{4\frac{1}{2}}{3}$$

1 ℳ wächst unter denselben Bedingungen an, zu:

$$\frac{100 + \frac{4\frac{1}{2}}{3}}{100}$$

mithin wachsen y Mark in 4 Monaten bei $4\frac{1}{2}$ % an, zu:

$$y \cdot \frac{100 + \frac{4\frac{1}{2}}{3}}{100}$$

und dies soll = 600 Mark sein.

Hiernach besteht die Gleichung:

$$y \cdot \frac{100 + \frac{4\frac{1}{2}}{3}}{100} = 600$$

aus welcher man den **baren Wert** y des ersten Wechsels, mit:

2). . . . $y = \dfrac{100 . 600}{100 + \frac{4\frac{1}{2}}{3}}$ findet.

Auf analoge Weise findet man für

Erkl. 52. Da nach der Anmerk. 19, S. 41, wenn die Anzahl der Jahre ein ächter Bruch ist, der Prozentsatz für diesen Jahresbruchteil proportional diesem Bruchteil angenommen wird, so muss man die Monate 4, 8, 10 in Jahre verwandeln, man erhält:

$$\left.\begin{array}{l} 4 \text{ Monate} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\ 8 \quad „ \quad = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ 10 \quad „ \quad = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \end{array}\right\} \text{Jahr.}$$

Der Zins für $\frac{1}{3}$ Jahr ist somit $\frac{4\frac{1}{2}}{3}$

„ „ „ $\frac{2}{3}$ „ „ „ $\frac{4\frac{1}{2} \cdot 2}{3}$

„ „ „ $\frac{1}{6}$ „ „ „ $\frac{4\frac{1}{2}}{6}$

„ „ „ $\frac{5}{6}$ „ „ „ $\frac{4\frac{1}{2} \cdot 5}{6}$

Erkl. 53.

100 ℳ wachs. in 1 Jahr bei $4\frac{1}{2}$ % an, zu $100+4\frac{1}{2}$

100 „ „ „ $\frac{1}{3}$ „ „ „ „ „ „ $100+\frac{4\frac{1}{2}}{3}$

100 „ „ „ $\frac{2}{3}$ „ „ „ „ „ „ $100+\frac{4\frac{1}{2}\cdot 2}{3}$

u. s. f.

Erkl. 54.

100 ℳ wachs. in 1 Jahr bei $4\frac{1}{2}$ % an, zu $100+4\frac{1}{2}$

100 „ „ „ $\frac{1}{6}$ „ „ „ „ „ „ $100+\frac{4\frac{1}{2}}{6}$

100 „ „ „ $\frac{5}{6}$ „ „ „ „ „ „ $100+\frac{4\frac{1}{2}\cdot 5}{6}$

die baren Werte z und u der zwei anderen ausgestellten Wechsel:

3). . . . $z=\frac{100.1500}{100+\frac{4\frac{1}{2}\cdot 2}{3}}$ (siehe Erkl. 52 und 53)

4). . . . $u=\frac{100.700}{100+\frac{4\frac{1}{2}\cdot 5}{6}}$ (siehe Erkl. 52 und 54)

und schliesslich findet man den baren Wert v des auszustellenden Wechsels x:

5). . . . $v=\frac{100.x}{100+4\frac{1}{2}}$

Aus den Gleichungen 1). bis 5). folgt die neue Gleichung:

$$\frac{100.600}{100+\frac{4\frac{1}{2}}{3}}+\frac{100.1500}{100+\frac{4\frac{1}{2}\cdot 2}{3}}+\frac{100.700}{100+\frac{4\frac{1}{2}\cdot 5}{6}}=\frac{100.x}{100+4\ldots}$$

Diese Gleichung durch 100 dividiert und die Doppelbrüche weggeschafft, gibt:

$$\frac{600}{100+\frac{9}{6}}+\frac{1500}{100+\frac{18}{6}}+\frac{700}{100+\frac{45}{12}}=\frac{x}{100+\ldots}$$

oder:

$$\frac{600}{100+\frac{3}{2}}+\frac{1500}{100+3}+\frac{700}{100+\frac{15}{4}}=\frac{x}{100+\ldots}$$

Addiert man die in den Nennern der einzelnen Glieder stehenden Zahlen, so erhält man:

$$\frac{600}{\frac{203}{2}}+\frac{1500}{103}+\frac{700}{\frac{415}{4}}=\frac{x}{\frac{209}{2}}$$

oder:

$$\frac{2.600}{203}+\frac{1500}{103}+\frac{4.700}{415}=\frac{2x}{209}$$

$$\frac{1200}{203}+\frac{1500}{103}+\frac{2800}{415}=\frac{2x}{209}$$

Nach nebenstehenden Hülfsrechnungen geht diese Gleichung über, in:

Hülfsrechnungen.

1). 203 | 1200 | 5,911 abgerundet = 5,91
```
1015
 1850
 1827
   230
   203
   270
```

2). 103 | 1500 | 14,563 abgerundet = 14,56
```
103
 470
 412
  580
  515
   650
   618
   320
```

Hülfsrechnungen.

3). 415 : 2800 | 6,747 abgerundet = 6,75
2490
3100
2905
1950
1660
2900

4). 13,61 . 209
12249
27220
2844,49

$$5{,}91 + 14{,}56 + 6{,}75 = \frac{2x}{209}$$

oder in:

$$27{,}22 = \frac{2x}{209}$$

Hieraus erhält man:

$$x = \frac{209 . 27{,}22}{2} \text{ oder:}$$

$$x = 209 . 13{,}61$$

Für den Betrag x des auszustellenden Wechsels, der nach einem Jahr fällig ist und die drei übrigen Wechsel ersetzt, erhält man somit nach Hülfsrechnung 4:

$$x = 2844{,}49 \text{ oder abgerundet} = 2844 \text{ Mark.}$$

Aufgabe 41. Ein Kapital von 16000 Mark ist auf Zinseszinsen zu 5 % jährlich ausgeliehen; die Verwaltungskosten betragen für jedes Jahr 1 % des vergrösserten Kapitals und werden am Ende des Jahres abgerechnet. Zu welcher Summe wird das Kapital in 20 Jahren anwachsen?

Formel: $K = k . 1{,}0p^n$

Auflösung.

Nach vorstehender Formel:

$$K = k . 1{,}0p^n$$

(siehe Formel I[a], Seite 4)

ist das ausgeliehene Kapital von 16000 Mark bis zu Ende des 1ten Jahres angewachsen, zu:

$$1600 . 1{,}05^1$$

Da nun hiervon für 1 % Verwaltungskosten abgezogen wird, so bleibt nach der Erklärung 55 nur noch $\frac{99}{100}$ dieser Summe, nämlich:

$$\frac{99}{100} . 16000 . 1{,}05 \text{ übrig.}$$

Dieses letztere Kapital wächst bis Ende des 2ten Jahres an, zu:

$$\frac{99}{100} . 16000 . 1{,}05 . 1{,}05$$

Da hiervon abermals 1 % für Verwaltungskosten abgezogen wird, so bleibt

Erkl. 55. Soll irgend eine Summe von A Mark um 1 % vermindert werden und man soll berechnen, was übrig bleibt, so sage man:

1 % Abzug heisst:

von 100 Mark soll 1 Mark abgezogen werden, mithin wird

von 1 ℳ der Betrag $\frac{1}{100}$ ℳ und

" A " " " $\frac{1}{100} \cdot A$ Mark abgezogen.

Somit bleibt

$$A - \frac{1}{100}A \text{ oder:}$$

$$\frac{100}{100}A - \frac{1}{100}A \text{ d. i. } \frac{99}{100}A \text{ übrig.}$$

Hülfsrechnung.

$$2 \,.\, log\, 0{,}99 = 20 \,.\, (0{,}9956352 - 1)$$
$$= 19{,}9127040 - 20$$
$$= 0{,}9127040 - 1$$

nach der Erkl. 55 nur noch $\frac{99}{100}$ dieser Summe, nämlich:

$$\frac{99}{100} \cdot \frac{99}{100} \,.\, 16000 \,.\, 1{,}05 \,.\, 1{,}05$$

oder:

$$\left(\frac{99}{100}\right)^2 \cdot 16000 \,.\, 105^2 \text{ übrig.}$$

Dieses letztere Kapital wächst bis Ende des 3ten Jahres an, zu:

$$\left(\frac{99}{100}\right)^2 \cdot 16000 \,.\, 1{,}05^2 \,.\, 1{,}05$$

Da hiervon wiederum 1% für Verwalt.-Kosten abgezogen werden, so bleibt **am Ende des 3ten Jahres** nach der Erkl. 55 nur noch $\frac{99}{100}$ dieser Summe, nämlich:

$$\frac{99}{100} \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^2 \cdot 16000 \,.\, 1{,}05^2 \,.\, 1{,}05$$

oder:

$$\left(\frac{99}{100}\right)^3 \cdot 16000 \,.\, 1{,}05^3 \text{ übrig.}$$

Fährt man mit dieser Betrachtung fort, so wird man am Ende des **20ten Jahres** die noch übrig bleibende Summe, von:

$$\left(\frac{99}{100}\right)^{20} \cdot 16000 \,.\, 1{,}05^{20} \text{ erhalten,}$$

welche gleich der in Frage stehenden Summe x ist, somit besteht die Gleichung:

$$x = \left(\frac{99}{100}\right)^{20} \cdot 16000 \cdot 1{,}05^{20} \text{ oder:}$$

$$x = 16000 \,.\, 1{,}05^{20} .\, 0{,}99^{20}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$log\, x = log\, 16000 + 20 \,.\, log\, 1{,}05 + 20 \,.\, log\, 0{,}99$$

Nun ist: $log\, 1{,}05 = 0{,}0211893$
$.\, 20$
$0{,}4237860$
$+ log\, 16000 = 4{,}2041200$
$4{,}6279060$
$+ 20 \,.\, log\, 0{,}99 = 0{,}9127040 - 1$ (siehe Hülfsrechn.)
$log\, x = 5{,}5406100 - 1$

oder:

$$\log x = 4{,}5406100$$

6047
53
50
3
2,5

mithin ist:

$$x = 34722{,}42$$

Das Kapital von 16000 Mark ist somit nach 20 Jahren und mit Abzug der Verwaltungskosten angewachsen, zu:

34722 Mark 42 pf.

Aufgabe 42. Eine Schuld von 23889 Mark ist zu 5 % verzinset. Wenn nun hierauf nach 5 Jahren 1728 Mark und nach 8 Jahren 1494 Mark abgetragen werden; wie gross ist der Rest der Schuld, der nach 10 Jahren abgetragen wird, wenn Zinseszinsen der Berechnung zu Grunde gelegt werden?

Formel: $K = k \, . \, 1{,}0p^n$

Erkl. 56. Die in nebenstehender Auflösung aufgestellte Gleichung I. hätte man auch, wie folgt ableiten können:

Die Schuld 23889 Mark wächst bis Ende des 10ten Jahres an, zu:

$$23889 \, . \, 1{,}05^{10}$$

Nun hat der Gläubiger nach 5 Jahren 1728 Mark erhalten, welche derselbe bis zu Ende des 10ten Jahres, also 5 Jahre lang, auf Zinseszinsen legen kann, mithin am Ende des 10ten Jahres einen Wert von:

$1728 \, . \, 1{,}05^5$ repräsentieren.

Ferner hat der Gläubiger nach 8 Jahren die Summe von 1494 Mark erhalten, welche ihm bis Ende des zehnten Jahres, also nach 2 Jahren, ein Kapital von:

$1494 \, . \, 1{,}05^2$ repräsentieren.

Der Rest x der Schuld ist somit:

$$x = 23889 \, . \, 1{,}05^{10} - 1728 \, . \, 1{,}05^5 - 1494 \, . \, 1{,}05^2$$

(vergl. nebenstehende Gleichung I).

Auflösung.

Die Schuld von 23889 Mark wächst bei 5 % Zinseszinsen bis Ende des 5ten Jahres nach vorstehender Formel:

$K = k \, . \, 1{,}0p^n$ (siehe Formel Ia, S. 4)

an, zu:

$$23889 \, . \, 1{,}05^5$$

Von dieser Summe werden 1728 ℳ abgetragen, mithin bleiben

$$(23889 \, . \, 1{,}05^5 - 1728) \text{ ℳ}$$

welche bis Ende des 8ten Jahres, also nach **drei** weiteren Jahren anwachsen, zu:

$$(23889 \, . \, 1{,}05^5 - 1728) \, . \, 1{,}05^3 \text{ ℳ}$$

Von dieser Summe werden nunmehr 1494 ℳ abgetragen, mithin bleiben:

$$[(23889 \, . \, 1{,}05^5 - 1728) \, . \, 1{,}05^3 - 1494] \text{ ℳ}$$

welche bis Ende des 10ten Jahres, also nach **zwei** weiteren Jahren anwachsen, zu:

$$[(23889 \, . \, 1{,}05^5 - 1728) \, . \, 1{,}05^3 - 1494] \, . \, 1{,}05^2 \text{ ℳ}$$

und dies ist der gesuchte Rest x der Schuld, welcher noch am Ende des 10ten Jahres zu zahlen ist, somit hat man die Gleichung:

$$x = [(23889 \, . \, 1{,}05^5 - 1728) \, . \, 1{,}05^3 - 1494) \, . \, 1{,}05^2$$

oder:

$$x = [23889 \,.\, 1{,}05^5 \,.\, 1{,}05^3 - 1728 \,.\, 1{,}05^3 - 1494]\, 1{,}05^2$$

$$x = 23889 \,.\, 1{,}05^8 \,.\, 1{,}05^2 - 1728 \,.\, 1{,}05^3 \,.\, 1{,}05^2 - 1494 \,.\, 1{,}05^2$$

$$\text{I.} \ldots x = 23889 \,.\, 1{,}05^{10} - 1728 \,.\, 1{,}05^5 - 1494 \,.\, 1{,}05^2$$ (siehe Erkl. 56)

Hülfsrechnungen.

1). $\log 23889 \,.\, 1{,}05^{10} = 10 \,.\, \log 1{,}05 + \log 23889$

Nun ist: $\log 1{,}05 = 0{,}0211893$
. 10
0,2118930
$+ \log 23889 = 4{,}3781980$
$\log 23889 \,.\, 1{,}05^{10} = 4{,}5900910$
0836
74
66,6
7,4
7,7

mithin ist:
$23889 \,.\, 1{,}05^{10} = \underline{38912{,}67}$

2). $\log 1728 \,.\, 1{,}05^5 = 5 \,.\, \log 1{,}05 + \log 1728$

Nun ist: $\log 1{,}05 = 0{,}0211893$
. 5
5,1059465
$+ \log 1728 = 3{,}2375437$
$\log 1728 \,.\, 1{,}05^5 = 3{,}3434902$
4874
28
19,7

mithin ist:
$1728 \,.\, 1{,}05^5 = \underline{2205{,}41}$

3). $\log 1494 \,.\, 1{,}05^2 = 2 \,.\, \log 1{,}05 + \log 1494$

Nun ist: $\log 1{,}05 = 0{,}0211893$
. 2
0,0423786
$+ \log 1494 = 3{,}1743506$
$\log 1494 \,.\, 1{,}05^2 = 3{,}2167292$
7200
92
105

mithin ist:
$1494 \,.\, 1{,}05^2 = \underline{1647{,}14}$

Nach nebenstehenden Hülfsrechnungen 1, 2 und 3 geht diese Gleichung über, in:

$$x = 38912{,}67 - 2205{,}41 - 1647{,}14$$

und hieraus erhält man für den Rest x der Schuld nach 10 Jahren:

$$x = 35060{,}12 \text{ Mark oder abgerundet:}$$
$$= 35060 \text{ Mark.}$$

Aufgabe 43. Zum Neubau eines Krankenhospitals nahm eine Kirchengemeinde 150000 Mark bei einer Provinzialhülfskasse zu 4 % auf und verpflichtete sich, diese Anleihe in den nächsten 50 Jahren durch gleiche jährliche Raten zu amortisieren (siehe Erkl. 57). Wie hoch beläuft sich eine solche Rate?

Erkl. 57. Unter Amortisation — amortisieren — (Ertödtung, Auslöschung, Kraftloserklärung) versteht man hier die Abtragung oder Tilgung einer Schuld und zwar meistens mittelst Ratenzahlungen.

Formel:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Auflösung.

Da die von der Kirchengemeinde aufgenommene Schuld durch jährliche Raten amortisiert (getilgt, abgetragen) werden soll, so kommt bei der Berechnung dieser Raten vorstehende Formel:



Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der ausführliche Prospekt und das ausführliche Inhaltsverzeichnis der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

Kurz angedeutetes

Inhaltsverzeichnis der ersten 80 Hefte.

Heft 23. **Zinseszinsrechnung.** (Forts. von Heft 16.)
" 24. **Das Apollonische Berührungs-Problem.** (Forts. von Heft 14.)
" 25. **Die regulären Polyeder.** (Forts. von Heft 22.)
" 26. **Die Reihen.** (Forts. von Heft 17.)
" 27. **Ebene Trigonometrie.** (Forts. von Heft 15.)
" 28. **Die regulären Polyeder.** (Forts. von Heft 25.)
" 29. **Das Apollonische Berührungs-Problem.** (Forts. von Heft 24.)
" 30. **Differential-Rechnung.** (Forts. von Heft 6.)
" 31. **Statik; oder die Lehre vom Gleichgewicht fester Körper.**
" 32. **Die regulären Polyeder.** (Forts. von Heft 28.)
" 33. **Das Apollonische Berührungs-Problem.** (Forts. von Heft 29.)
" 34. **Goniometrie.**
" 35. **Zinseszinsrechnung.** (Forts. von Heft 23.)
" 36. **Die regulären Polyeder.** (Forts. von Heft 32.)
" 37. **Differential-Rechnung.** (Forts. von Heft 30.)
" 38. **Statik.** (Forts. von Heft 31.)
" 39. } **Das Apollonische Berührungs-**
" 40. } **Problem.** (Forts. v. Heft 33.)
" 41. **Potenzen und Wurzeln.**
" 42. **Logarithmen.**
" 43. **Goniometrie.** (Forts. von Heft 34).
" 44. **Gleichungen vom 1. Grade mit einer Unbekannten.**
" 45. **Potenzen und Wurzeln.** (Forts. von Heft 41.)
" 46. **Logarithmen.** (Forts. von Heft 42.)
" 47. **Die regulären Polyeder.** (Forts. von Heft 36.)
" 48. **Differential-Rechnung.** (Forts. von Heft 37.)
" 49. **Statik.** (Forts. von Heft 38.)
" 50. **Zinseszinsrechnung.** (Forts. von Heft 35.)
" 51. **Potenzen und Wurzeln.** (Forts. von Heft 45.)
" 52. **Logarithmen.** (Forts. v. Heft 46.)
" 53. **Das Apollonische Berührungs-Problem.** (Forts. von Heft 40.)

Heft 54. **Gleichungen vom 1. Grade mit einer Unbekannten.** (Forts. von Heft 44.)
" 55. **Goniometrie.** (Forts. v. Heft 43.)
" 56. **Potenzen und Wurzeln.** (Forts. von Heft 51.)
" 57. **Logarithmen.** (Forts. v. Heft 52.)
" 58. **Die regulären Polyeder.** (Forts. von Heft 47.)
" 59. **Differential-Rechnung.** (Forts. von Heft 48.)
" 60. **Ebene Trigonometrie.** (Forts. von Heft 27.)
" 61. **Statik.** (Forts. von Heft 49.)
" 62. **Potenzen und Wurzeln.** (Forts. von Heft 56.)
" 63. **Das Apollonische Berührungs-Problem.** (Forts. von Heft 53.)
" 64. **Logarithmen.** (Forts. v. Heft 57.)
" 65. **Rotationskörper.** (Forts. von Heft 58.)
" 66. **Gleichungen vom 1. Grade mit einer Unbekannten, Textaufgaben.**
" 67. **Differential-Rechnung.** (Forts. von Heft 59.)
" 68. **Das Apollonische Berührungs-Problem.** (Forts. von Heft 63.)
" 69. **Potenzen und Wurzeln.** (Forts. von Heft 62.)
" 70. **Logarithmen.** (Forts. v. Heft 64.)
" 71. **Rotationskörper.** (Forts. von Heft 65.)
" 72. **Dynamik, oder die Lehre der Bewegung fester Körper.**
" 73. **Gleichungen vom 1. Grade mit mehreren Unbekannten.**
" 74. **Goniometrie.** (Fortsetzung von Heft 55.)
" 75. **Ebene Trigonometrie.** (Forts. von Heft 60.)
" 76. **Potenzen u. Wurzeln.** (Schluss.) (Forts. von Heft 69.)
" 77. **Logarithmen.** (Schluss.) (Forts. von Heft 70.)
" 78. **Das Apollonische Berührungs-Problem.** (Forts. von Heft 68.)
" 79. **Statik.** (Forts. von Heft 61.)
" 80. **Die reinen und unreinen quadratischen Gleichungen.**

u. s. f. u. s. f.

Druck von Hammer & Liebich in Stuttgart.

129. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Algebra.
Zinseszinsrechnung.
Forts. von Heft 50. — Seite 81—96.





Vollständig gelöste
Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren** Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik**, **Mechanik**, **Graphostatik**, Chemie, Geodäsie, Nautik, **mathemat. Geographie**, Astronomie; des **Maschinen-**, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, **Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: darstell. Geometrie, Polar- u. **Parallel-Perspektive**, **Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Algebra.
Zinseszinsrechnung.

Fortsetzung von Heft 50. — Seite 81—96.

Inhalt:
...tsetzung der gemischten praktischen Aufgaben über die Zinseszinsrechnung. — Gelöste Aufgaben.

Stuttgart 1884.
Verlag von Julius Maier.

— Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte. —
Di... ...uptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

vorläufige Inhaltsverzeichnis der Hefte 101—160 befindet sich auf

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften **zu dem billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem** Gesamtgebiete der **Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst Angabe und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle** Teile der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.**

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen,** techn. **Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen **verbreitet.** — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der **Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16,** entgegen und wird deren Erledigung **thunlichst berücksichtigt.**

Stuttgart, August 1883. **Die Verlagshandlung.**

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

in Anwendung.

Setzt man in dieser Formel:

für das auf Zinseszinsen stehende Kapital $k = 150000$, nämlich die von der Kirchengemeinde aufgenommene Schuld;

für die Anzahl n der Jahre $= 50$;

für die am Ende eines jeden Jahres wegzunehmende Summe $r = x$, nämlich die **gesuchte** Ratenzahlung, durch welche die aufgenommene Schuld amortisiert (getilgt) werden soll, und endlich

für den künftigen Wert des auf Zinseszinsen stehenden und jährlich um die Summe x verminderten Kapitals k die Grösse 0, da die Schuld k amortisiert (getilgt), mithin $= 0$ werden soll,

so erhält man:

$$0 = 150000 \,.\, 1{,}04^{50} - \frac{x\,(1{,}04^{50} - 1)}{0{,}04}$$

Diese Gleichung nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{x\,(1{,}04^{50} - 1)}{0{,}04} = 150000 \,.\, 1{,}04^{50}$$

$$x = \frac{150000 \,.\, 1{,}04^{50} \,.\, 0{,}04}{1{,}04^{50} - 1}$$

oder nach nebenstehender Hülfsrechn. 1:

$$x = \frac{150000 \,.\, 1{,}04^{50} \,.\, 0{,}04}{6{,}10665}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log x = \log 150000 + 50 \,.\, \log 1{,}04 + \log 0{,}04 - \log 6{,}10665$$

Nun ist: $\log 1{,}04 = 0{,}0170333$
$\qquad .\,50$
$\qquad 0{,}8516650$
$+\log 150000 = 5{,}1760913$
$+\log 0{,}04 = 0{,}6020600 - 2$
$\qquad 6{,}6298163 - 2$
$-\log 6{,}10665 = -\,0{,}7858031$ (Hülfsr. 2)
$\log x = 5{,}8440132 - 2$
oder: $\log x = 3{,}8440132$
$\qquad 0109$
$\qquad 23$
$\qquad 18{,}9$
$\qquad 4{,}1$

mithin ist:
$num \log x = 6982{,}537$

Damit die Kirchengemeinde die von ihr aufgenommene Schuld nach 50 Jah-

Hülfsrechnungen.

1). $\log 1{,}04^{50} = 50 \,.\, \log 1{,}04$
Nun ist: $\log 1{,}04 = 0{,}0170333$
$\qquad .\,50$
$\log 1{,}04^{50} = 0{,}8516650$
$\qquad 6619$
$\qquad 31$
$\qquad 30{,}5$

mithin ist:
$num \log 1{,}05^{50} = 7{,}10665$
und
$1{,}05^{50} - 1 = 7{,}10665 - 1 = 6{,}10665$

2). $\log 6{,}10665 = 0{,}7857995$
$\qquad + 35{,}5$
$\qquad 0{,}7858031$

ren für amortisiert erklären kann, hat sie also am Ende eines jeden Jahres bei der Provinzialkasse die Summe von 6982 ℳ 54 pf. abzutragen.

Anmerkung 6. Die Ordnungsnummern der nachfolgenden Erklärungen sind die fortlaufenden Nrn. der Erklärungen in der 2. Auflage der ersten 5 Druckbogen.

---

*). **Aufgabe 44.** Zu welcher Summe würde 1 Pfennig bis Ende des Jahres 1884 angewachsen sein, wenn derselbe zur Zeit Christi Geburt auf Zinseszinsen zu 4 % gegeben worden wäre?

*). Die den Aufgaben beigedruckten Sternchen: *). deuten an, dass solche Aufgaben, mit Benutzung der am Schlusse beigefügten Hülfstafel I, auch **ohne Logarithmen** gelöst werden können.

Erkl. 110. Da das gesuchte Endkapital ein sehr grosses wird, mithin dasselbe nicht in Pfennige, wohl aber in Mark ausgedrückt werden soll, so beachte man vornweg, dass 100 Pfennige = 1 Mark, also 1 Pfennig = $\frac{1}{100}$ Mark ist.

Hülfsrechnung.

$$\begin{array}{rrl} log\,1{,}04 & = 0{,}0170333393 & \text{(siehe Hülfstafel II) †).} \\ & .\,1884 & \\ \hline & 681333572 & \\ & 1362667144 & \\ & 1362667144 & \\ & 170333393 & \\ \hline & 32{,}0908112412 & \end{array}$$

†). Da die Zahl, mit welcher der *log* 1,04 multipliziert werden soll, eine sehr grosse ist (1884), so benutze man, um wenigstens bis auf 7 Stellen ein ziemlich genaues Resultat zu erhalten, die in der Hülfstafel II für 1,0*p* angegebenen 10-stelligen Logarithmen.

Erkl. 111. Wie sich aus nebenstehender Auflösung ergibt, erhält man die gesuchte Summe nur bis auf Quadrillionen Mark genau, will man dieselbe bis auf 1 Mark genau berechnen, so muss man der Ausrechnung die in den *Callet*'schen Tafeln enthaltenen natürlichen Logarithmen, welche daselbst bis auf 48 Dezimalstellen genau angegeben sind, zu Grunde legen. Auf den Seiten 108—110 der *Callet*'schen Tafeln findet man die Anweisung hierzu.

Erkl. 112. Bestände die Erdkugel aus reinem Golde, so würde der Wert von ca. 10 solcher Erdkugeln ungefähr der Summe gleichkommen, zu welcher ein zur Zeit Christi Geb. zu 4 % auf Zinseszinsen ausgeliehener Pfennig bis Ende 1884 angewachsen wäre.

Formel 1ª: $K = k\,.\,1{,}0p^n$

In Betreff der Formeln siehe das am Schlusse des Buches beigefügte Formelnverzeichnis.

Auflösung. Setzt man in vorstehender Formel 1ª:

$$k = \frac{1}{100} \quad \text{(siehe Erkl. 110)}$$

$$p = 4 \quad \text{und}$$

$n = 1884$, da von der Zeit Christi Geburt bis Ende des Jahres 1884, nämlich in der Zeit, in welcher jener Pfennig auf Zinseszinsen steht, 1884 Jahre verstreichen, so erhält man für die gesuchte Summe $K = x$, die Bestimmungsgleichung:

$$1).\ .\ x = \frac{1}{100}\,.\,1{,}04^{1884} = \frac{1{,}04^{1884}}{100}$$

Hieraus ergibt sich:

$$log\,x = 1884\,.\,log\,1{,}04 - log\,100$$

oder nach nebenstehender Hülfsrechn.:

$$log\,x = 32{,}0908112 - 2{,}0000000$$

mithin:

$$log\,x = 30{,}0908112$$

$$\begin{array}{r} 7869 \\ \hline 243 \\ 211{,}8 \\ \hline 31{,}2 \\ 31{,}7 \end{array}$$

und

$$numlog\,x = 1\,232569\,000000\,000000\,000000\,000000$$

Für die gesuchte Summe erhält man also, da für die siebente Stelle (für 9) eine etwas grössere Zahl aus dem Differenztäfelchen entnommen wurde, als sich für die letzte Differenz (31,2) ergeben würde, bis auf Quadrillionen genau:

1 Quintillion und 232569 Quadrillionen Mark. (Siehe die Erkl. 111.)

Aufgabe 45. Die Bevölkerung einer Stadt nimmt jährlich um 3 **auf** 100 zu und beträgt jetzt 15800 Seelen; nach wieviel Jahren wird dieselbe um 12737 zugenommen haben?

Erkl. 113. Der Zinsfuss p wird oft auf verschiedene Weise ausgedrückt. Man unterscheidet nämlich:

a). p % vom 100 oder kurzweg: p %,
b). p % im 100 und
c). p % auf 100

Heisst es: p % vom 100 oder kurzweg: p %, so sollen sich 100 Einheiten nach Ablauf eines Jahres um p Einheiten vermehren oder vermindern; heisst es: p % im 100, so sollen sich schon $100-p$ Einheiten nach Verlauf eines Jahres um p Einheiten vermehren oder vermindern, und heisst es schliesslich: p % auf 100, wie in der Aufgabe 45, so sollen sich erst $100+p$ Einheiten nach Verlauf eines Jahres um p Einheiten vermehren oder vermindern.

Erkl. 114. Nach der Erkl. 113 erhält man den Zinsfaktor q für die Aufgabe 45, wie folgt: p % auf 100 heisst:

$100+p$ Geldeinheiten tragen bei p % nach Ablauf eines Jahres p Mark Zinsen,

mithin wachsen jene $100+p$ Geldeinheiten an zu $100+p+p$ oder zu $100+2p$ und hiernach wächst die Geldeinheit bei p % auf 100 an zu: $\frac{100+2p}{100+p}$ und dies ist für solche Fälle der allgemeine Zinsfaktor q.

Speziell für das in der Aufgabe 45 gegebene Zahlenbeispiel ist:

$$q = \frac{100+2.3}{100+3}$$

Hülfsrechnungen.

1).
$$\begin{aligned} log\,28537 &= 4,4554083 \\ -log\,15800 &= 4,1986571 \\ \hline &\ 0,2567512 \end{aligned}$$

2).
$$\begin{aligned} log\,106 &= 2,0253059 \\ -log\,103 &= 2,0128372 \\ \hline &\ 0,0124687 \end{aligned}$$

Formel 1[b]: $K = k.q^n$

Auflösung. In dieser Aufgabe ist die Seelenzahl zu Anfang, also: $k = 15800$ und die Seelenzahl zu Ende, also: $K = 15800 + 12737$ direkt gegeben; ferner ergibt sich für den Zinsfaktor q, nach welchem die jährliche Vermehrung stattfindet, wie aus der Erkl. 114 ersichtlich ist: $q = \frac{100+2.3}{100+3}$ und schliesslich ist die Anzahl n der Jahre gesucht, also $= x$.

Mit Benutzung vorstehender Formel erhält man hiernach die Bestimmungsgleichung:

$$15800 + 12737 = 15800 \cdot \left(\frac{100+2.3}{100+3}\right)^x$$

und hieraus erhält man x wie folgt:

$$28537 = 15800 . \left(\frac{106}{103}\right)^x$$

$$\left(\frac{106}{103}\right)^x = \frac{28537}{15800}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$x.(log 106 - log 103) = log 28537 - log 15800$$

und
$$x = \frac{log\,28537 - log\,15800}{log\,106 - log\,103}$$

oder nach den Hülfsrechnungen 1). u. 2).:

$$x = \frac{0,2567512}{0,0124687}$$

und hieraus ergibt sich durch Division, dass die gesuchte Anzahl der Jahre = 20,6, also über 20 Jahre ist.

Aufgabe 46. Wieviel betragen für den Zinsfuss p die $\frac{1}{m}$ jährigen Zinsen? oder: welches ist der $\frac{1}{m}$ jährige Zinsfuss, wenn der jährliche Zinsfuss $= p$ ist?

Die Berechnung soll nicht nach dem im bürgerlichen Leben üblichen Gebrauch (siehe Erkl. 7 oder Erkl. 38 der 2. Auflage), sondern streng mathematisch ausgeführt werden.

Formel 1[a]: $K = k.1,0p^n$

Auflösung. Ist der Zinsfuss $= p$ und man will mathematisch richtig die $\frac{1}{m}$tel jährigen Zinsen für 100 Geldeinheiten, oder was dasselbe sagt: den

entsprechenden Zinsfuss für $\frac{1}{m}$ Jahr berechnen, und zwar nicht nach dem im bürgerlichen Leben üblichen Gebrauch, nach welchem dieser $\frac{1}{m}$tel jährige Zinsfuss proportional dem jährlichen Zinsfuss p, also $= \frac{p}{m}$, angenommen wird (siehe Erkl. 7 oder Erkl. 38 der 2. Auflage), sondern nach mathematischen richtigen Grundsätzen, so muss man jene $\frac{1}{m}$tel jährigen Zinsen, bezeichnet durch: p_m, so bestimmen, dass der künftige Wert der Geldeinheit (oder irgend einer anderen Summe k, siehe Erkl. 116) nach Ablauf eines Jahres (oder auch einer gewissen Anzahl n von Jahren, siehe Erkl. 116) derselbe wird, **einerlei** ob man alle $\frac{1}{m}$ Jahr, also m mal, m Zeitabschnitte lang (bezw. auch $n.m$ mal, siehe Erkl. 116) die gesuchten $\frac{1}{m}$jährigen Zinsen: p_m zur Geldeinheit (bezw. zu jenem Kapital k) schlägt, oder ob man am Ende eines Jahres (bezw. am Ende von n Jahren) die jährlichen Zinsen p zum Kapital schlägt.

Setzt man deshalb in umstehender Formel: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$ einmal:

$$k = 1,\ n = 1 \text{ und } 1{,}0p = \frac{100+p}{100}$$

ein andermal:

$$k = 1,\ n = m \text{ und } 1{,}0p = \frac{100+p_m}{100}$$

so erhält man für p_m die Bestimmungsgleichung:

$$1). \quad 1 \cdot \left(\frac{100+p_m}{100}\right)^m = 1 \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^1$$

und hieraus ergibt sich für die gesuchten $\frac{1}{m}$ jährigen Zinsen, bezw. für den gesuchten $\frac{1}{m}$ jährigen Zinsfuss p_m, der Reihe nach:

$$\left(\frac{100+p_m}{100}\right)^m = \frac{100+p}{100}$$

$$\frac{100+p_m}{100} = \sqrt[m]{\frac{100+p}{100}}$$

Erkl. 115. Die in nebenstehender Auflösung entwickelte Gleichung 2). kann man sich als besondere Formel, nämlich als:

Formel 21: $$p_m = 100\left(\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} - 1\right)$$

merken.

Im übrigen beachte man die Antwort der Frage 15 oder der Frage 16 der 2. Auflage, bezw. die Anmerkung 18 oder die Erkl. 75 der 2. Auflage, in welcher bereits dieselbe Relation entwickelt wurde.

Erkl. 116. Nebenstehende Gleichung hätte man auch auf allgemeine Weise erhalten können, wenn man in der Formel: $K = k \,.\, 1{,}0p^n$ einmal:

$$k = k,\ n = n \text{ und } 1{,}0p = \frac{100+p}{100}$$

ein andermal:

$$k = k,\ n = m.n \text{ und } 1{,}0p = \frac{100+p_m}{100}$$

setzt. Man erhält hiernach:

$$k \cdot \left(\frac{100+p_m}{100}\right)^{m.n} = k \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$$

oder:

$$\left(\frac{100+p_m}{100}\right)^{m.n} = \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$$

$$\left(\frac{100+p_m}{100}\right)^m = \frac{100+p}{100}$$

und schliesslich wie nebenstehend:

$$p_m = 100\left(\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} - 1\right)$$

$$p_m = 100 \sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} - 100$$

oder:

$$2). \; . \quad p_m = 100\left(\sqrt[m]{\frac{100+p}{100}} - 1\right)$$

(siehe die Erkl. 115).

Aufgabe 47. Wieviel betragen bei p % $\frac{1}{m}$ jährlichen Zinsen die Zinsen jährlich, wenn die Zinsen alle $\frac{1}{m}$ Jahr zum Kapital geschlagen werden? oder:

Welches ist der jährliche Zinsfuss p, wenn der $\frac{1}{m}$ jährliche $= p_m$ ist?

Die Berechnung soll nicht nach dem im bürgerlichen Leben üblichen Gebrauch, sondern streng mathematisch ausgeführt werden.

Erkl. 117. Die in nebenstehender Auflösung entwickelte Gleichung 1). kann man sich als besondere Formel, nämlich als:

Formel 21^a: $p = 100\left(\frac{100+p_m}{100}\right)^m - 100$

merken.

Auflösung. Löst man die in der Auflösung der vorigen Aufgabe aufgestellte Gleichung 1).:

$$1 \cdot \left(\frac{100+p_m}{100}\right)^m = 1 \cdot \left(\frac{100+p}{100}\right)^1$$

nach p auf, so erhält man für den gesuchten jährlichen Zinsfuss p der Reihe nach:

$$\left(\frac{100+p_m}{100}\right)^m = \frac{100+p}{100}$$

$$100+p = 100\left(\frac{100+p_m}{100}\right)^m$$

oder:

$$1). \; . \quad p = 100\left(\frac{100+p_m}{100}\right)^m - 100$$

(siehe die Erkl. 117 und 116).

Aufgabe 48. In einem Staate leben gegenwärtig 1 Million Menschen. Wenn nun von 36 Menschen durchschnittlich einer stirbt und auf 28 jährlich eine Geburt kommt, ausserdem jährlich 2500 Menschen einwandern; nach wieviel Jahren wird dieser Staat circa $1\frac{1}{2}$ Million Einwohner zählen?

Formel 4:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n + \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Auflösung. In dieser Aufgabe ist die Bevölkerung zu Anfang, also $k = 1\,000\,000$, die Bevölkerung zu Ende, also $K = 1\,500\,000$, und die bis zu Ende eines jeden Jahres durch Einwanderung zunehmende Seelenzahl, also $r = 2500$ direkt gegeben.

Ferner ergibt sich für den Prozentsatz p, durch welche die jährliche Vermehrung der in jedem Jahr vorhandenen Seelen ausgedrückt ist, nach der Erkl. 118: $p = \frac{50}{63}$ und schliesslich ist die Anzahl n der Jahre gesucht, also $= x$.

Erkl. 118. Zur Berechnung des Zinsfusses p, nach welchem die jährliche Vermehrung stattfindet, mache man folgende Betrachtung:

Auf 28 Menschen kommt 1 Geburt,

„ 1 „ „ $\frac{1}{28}$ „

mithin kommen:

a). . . auf 100 Menschen $\frac{100}{28}$ Geburten.

Ferner kommt:

auf 36 Menschen 1 Sterbefall,

„ 1 „ $\frac{1}{36}$ „

mithin kommen:

b). . . auf 100 Menschen $\frac{100}{36}$ Sterbefälle.

Aus den Relationen a). und b). ergibt sich für die jährliche Vermehrung für 100, also für p:

$$p = \frac{100}{28} - \frac{100}{36} \text{ oder:}$$

$$p = \frac{900 - 700}{252} = \frac{200}{252} \text{ oder:}$$

$$\text{c)}. . . p = \frac{50}{63}$$

Erkl. 119. Setzt man in $1{,}0p \left(= \frac{100+p}{100}\right)$ für $p = \frac{50}{63}$, so erhält man:

$$\text{a)}. . . 1{,}0p = \frac{100 + \frac{50}{63}}{100} = \frac{6300 + 50}{6300} = \frac{6350}{6300} = \frac{127}{126} \text{ und}$$

$$\text{b)}. . . 0{,}0p\ (= 1{,}0p - 1) = \frac{127}{126} - 1 = \frac{127 - 126}{126} = \frac{1}{126}.$$

Hülfsrechnungen.

1). $log\,18150 = 4{,}2588766$
$- log\,13150 = 4{,}1189258$
$0{,}1399508$

2). $log\,127 = 2{,}1038037$
$log\,126 = 2{,}1003705$
$0{,}0034332$

Mit Benutzung vorstehender Formel und nach der Erkl. 119 erhält man somit die Bestimmungsgleichung:

$$1500000 = 1000000 \cdot \left(\frac{100 + \frac{50}{63}}{100}\right)^x + \frac{2500 \cdot \left(\left(\frac{100 + \frac{50}{63}}{100}\right)^x - 1\right)}{\frac{100 + \frac{50}{63}}{100} - 1}$$

oder nach der Erkl. 119:

$$1500000 = 1000000 \cdot \left(\frac{127}{126}\right)^x + \frac{2500 \left(\frac{127}{126}\right)^x - 1}{\frac{1}{126}}$$

Diese Gleichung reduziert und nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$15000 = 10000 \cdot \left(\frac{127}{126}\right)^x + 25 \cdot 126 \cdot \left(\left(\frac{127}{126}\right)^x - 1\right)$$

$$10000 \cdot \left(\frac{127}{126}\right)^x + 25 \cdot 126 \cdot \left(\frac{127}{126}\right)^x = 15000 + 25.12$$

$$\left(\frac{127}{126}\right)^x \cdot \left(10000 + 3150\right) = 15000 + 3150$$

$$\left(\frac{127}{126}\right)^x = \frac{18150}{13150}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$x \cdot (log\,127 - log\,126) = log\,18150 - log\,13150$$

oder:

$$x = \frac{log\,18150 - log\,13150}{log\,127 - log\,126}$$

und nach den Hülfsrechnungen 1). und 2).:

$$x = \frac{0{,}1399508}{0{,}0034332}$$

und hieraus erhält man durch einfache Division für die gesuchte Anzahl x der Jahre:

$$x = 40{,}76 \text{ Jahre.}$$

Nach 41 Jahren wird hiernach die Seelenzahl von 1½ Million erreicht, bezw. überschritten sein, da Bruchteilen von Jahren in solchen Aufgaben keine Bedeutung beizumessen ist.

Aufgabe 49. Jemand hat eine Schuld von 50000 Mark zu tilgen, die zu 4% steht. Er zahlt alle Jahre 10000 Mark ab, die Zinsen mitgerechnet. Nach wieviel Jahren hat er die Schuld getilgt und wieviel hat er im letzten Jahr noch zu zahlen?

Erkl. 120. Bis zu Ende des 5. Jahres verbleibt nach der Formel 6:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n - \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

von der zu zahlenden Schuld ein Rest K:

$$K = 50000 \cdot 1{,}04^5 - \frac{10000\,(1{,}04^5 - 1)}{0{,}04}$$

oder:

$$K = 50000 \cdot 1{,}216653 - \frac{10000\,(1{,}216653 - 1)}{0{,}04}$$

(siehe Hülfsrechnung 1)

$$K = 60832{,}65 - 250000 \cdot 0{,}216653$$

$$K = 60832{,}65 - 54163{,}25$$

$$K = 6669{,}4 \text{ Mark.}$$

Hülfsrechnung.

1). $log\,1{,}04^5 = 5 \cdot log\,1{,}04 = 5 \cdot 0{,}0170333$
$= 0{,}0851665$

1478
187
178,5
8,5
7,1

mithin ist:

$1{,}04^5 = 1{,}216653$

$$\text{Formel 7:}\quad k = \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \cdot 1{,}0p^n}$$

Auflösung. In dieser Aufgabe ist die zu tilgende Summe, bezw. das Anfangskapital, welches am Ende eines jeden Jahres um eine gewisse Summe vermindert werden soll, also $k = 50000$ Mark gegeben; dann ist die Summe, um welche jenes Kapital am Ende eines jeden Jahres vermindert wird, also $r = 10000$ Mark, ebenso ist der Zinsfuss $p = 4$ gegeben, und schliesslich ist die Anzahl n der Jahre gesucht, also $= x$.

Mit Benutzung vorstehender Tilgungsformel (siehe Formel XVII in Anmerkung 22 oder Formel 7 in der Erkl. 56 der 2. Auflage) erhält man hiernach die Bestimmungsgleichung:

$$50000 = \frac{10000\,(1{,}04^x - 1)}{0{,}04 \cdot 1{,}04^x}$$

Diese Gleichung reduziert und nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$5 = \frac{1{,}04^x - 1}{0{,}04 \cdot 1{,}04^x}$$

$$5 \cdot 0{,}04 \cdot 1{,}04^x = 1{,}04^x - 1$$

$$1 = 1{,}04^x - 0{,}2 \cdot 1{,}04^x$$

$$1{,}04^x\,(1 - 0{,}2) = 1$$

$$1{,}04^x \cdot 0{,}8 = 1$$

$$1{,}04^x = \frac{1}{0{,}8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$1{,}04^x = 1{,}25$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$x \cdot log\,1{,}04 = log\,1{,}25$$

$$x = \frac{log\,1{,}25}{log\,1{,}04} \quad \text{oder:}$$

$$x = \frac{0{,}0969100}{0{,}0170333}$$

und hieraus erhält man durch einfache Division für die gesuchte Anzahl x der Jahre:

$$x = 5{,}102 \text{ Jahre.}$$

Nach dem somit für x gefundenen Wert ist der Rest der Schuld nach einem Bruchteil des 6. Jahres zu zahlen, sollen die Ratenzahlungen aber stets am Ende eines Jahres gezahlt werden, so berechne man zunächst den Rest K_5 der Schuld, welcher am Ende des 5. Jahres noch verbleibt, und dann den Wert dieser Schuld bis zu Ende des 6. Jahres, womit die

am Ende des 6. Jahres fällige Ratenzahlung gefunden wird.

Nach der Erkl. 120 erhält man für den Rest R_5 am Ende des 5. Jahres:

$$R_5 = 6669{,}4 \text{ Mark}$$

und dieser Rest wächst bis Ende des 6. Jahres mit den einfachen 4prozentigen Zinsen an zu:

$$6669{,}4 \,.\, 1{,}04 \quad \text{oder zu:}$$
$$6936{,}18 \text{ Mark.}$$

Nach 6 Jahren ist also die Schuld getilgt, wenn am Ende der ersten 5 Jahre je 10000, am Ende des 6. Jahres aber 6936 Mark 18 pf. gezahlt werden.

Aufgabe 50. Ein Kapital k ist zum Zinsfuss p ausgeliehen. In welcher Zeit wird es zur Summe K angewachsen sein, wenn das auf Zinseszinsen stehende Kapital jährlich um die Summe r vermehrt (oder vermindert) wird?

Formeln 4 und 6:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n \pm \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

Auflösung. Diese Aufgabe ist gelöst, sobald man vorstehende Formel:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n \pm \frac{r\,(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p}$$

als Bestimmungsgleichung mit der darin vorkommenden Unbekannten n betrachtet und diese Gleichung nach n auflöst.

Man erhält der Reihe nach:

$$K \,.\, 0{,}0p = k \,.\, 1{,}0p^n .\, 0{,}0p \pm r\,(1{,}0p^n - 1)$$

$$K \,.\, 0{,}0p = k \,.\, 1{,}0p^n .\, 0{,}0p \pm r \,.\, 1{,}0p^n \mp r$$

$$k \,.\, 1{,}0p^n .\, 0{,}0p \pm r \,.\, 1{,}0p^n = K \,.\, 0{,}0p \pm r$$

$$1{,}0p^n\,(k \,.\, 0{,}0p \pm r) = K \,.\, 0{,}0p \pm r$$

$$1{,}0p^n = \frac{K \,.\, 0{,}0p \pm r}{k \,.\, 0{,}0p \pm r}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$n \,.\, log\, 1{,}0p = log\,(K \,.\, 0{,}0p \pm r) - log\,(k \,.\, 0{,}0p \pm r)$$

und hieraus erhält man:

$$1).\quad n = \frac{log\left(\frac{K \,.\, p}{100} \pm r\right) - log\left(\frac{k \,.\, p}{100} \pm r\right)}{log\, 1{,}0p}$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass von den doppelten Vorzeichen die oberen bei einer jährlichen Vermehrung, die unteren bei einer jährlichen Verminderung zu benutzen sind.

Aufgabe 51. Bei einer Gewerbekasse machte ein Handwerker ein Anlehen von k Mark; zur Tilgung derselben musste er am Ende eines jeden Jahres n Jahre lang r Mark bezahlen. Wieviel % berechnete die Gewerbekasse?

Formel 7: $k = \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n}$

Auflösung. Diese Aufgabe ist gelöst, sobald man vorstehende Tilgungsformel:

$$k = \frac{r(1{,}0p^n - 1)}{0{,}0p \,.\, 1{,}0p^n}$$

als Bestimmungsgleichung mit der darin vorkommenden Unbekannten p betrachtet und diese Gleichung nach p auflöst.

Um diese Gleichung nach p auflösen zu können, muss man zunächst $1{,}0p$ als Unbekannte betrachten (siehe Erkl. 6 oder Erkl. 25 der 2. Auflage), dementsprechend in dieser Gleichung $0{,}0p = 1{,}0p - 1$ setzen und nach dieser Grösse $1{,}0p$ auflösen; man erhält der Reihe nach:

$$k = \frac{r(1.0p^n - 1)}{(1{,}0p - 1) \,.\, 1{,}0p^n}$$

$$k \,.\, (1{,}0p - 1) \,.\, 1{,}0p^n = r(1{,}0p^n - 1)$$

$$k \,.\, 1{,}0p \,.\, 1{,}0p^n - k \,.\, 1{,}0p^n = r \,.\, 1{,}0p^n - r$$

$$k \,.\, 1{,}0p^{n+1} - k \,.\, 1{,}0p^n - r \,.\, 1{,}0p^n = -r$$

$$k \,.\, 1{,}0p^{n+1} - (k + r) \,.\, 1{,}0p^n = -r$$

oder:

$$1). \quad 1{,}0p^{n+1} - \frac{k+r}{k} \,.\, 1{,}0p^n = -\frac{r}{k}$$

und hier stösst man auf eine unreine Gleichung vom höheren, nämlich vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade, deren allgemeine Auflösung hier nicht weiter verfolgt werden kann.

Erkl. 121. Das Nähere über die Auflösung höherer Gleichungen, als Gleichungen vom 3., 4., ... Grade findet man in Kleyer's Lehrbücher über die höheren Gleichungen.

Ist für n ein spezieller Zahlenwert gegeben, ist z. B. $n = 5$, so geht die allgemeine Gleichung 1). über in:

$$1{,}0p^{5+1} - \frac{k+r}{k} \cdot 1{,}0p^5 = -\frac{r}{k}$$

oder in:

$$1{,}0p^6 - \frac{k+r}{k} \cdot 1{,}0p^5 = -\frac{r}{k}$$

und man hat eine unreine Gleichung vom 6. Grade (siehe Erkl. 121), deren Auflösung durch probieren wie folgt stattfinden kann.

Erkl. 122. Ist der Prozentsatz p gesucht, so ist, wie aus nebenstehender Auflösung ersichtlich, die Lösung solcher Aufgaben ziemlich umständlich.

Derartige Aufgaben kommen in der Praxis jedoch nur in höchst seltenen Fällen vor, indem der Zinsfuss (Prozentsatz) p fast immer eine bekannte Grösse repräsentiert.

Man setzt für p der Reihe nach die Werte 1, 2, 3, ... und untersucht, ob einer dieser Werte der Gleichung genügt oder zwischen welchen zweien die-

ser Werte p liegen muss, findet man nämlich, dass einer dieser Werte für p gesetzt der Gleichung genügt, so ist die Aufgabe gelöst, findet man hingegen, was meistens der Fall sein wird, dass keiner dieser Werte genügt, dass z. B. $p = 3$ gesetzt einen zu kleinen Wert, $p = 4$ aber gesetzt einen zu grossen Wert ergibt, so muss offenbar p zwischen 3 und 4 liegen; um im letzten Fall p genauer zu finden, setze man für p verschiedene Werte, die zwischen 3 und 4 liegen und schliesse in analoger Weise wie vorhin die Grenzen für den wahren Wert von p durch analoges fortgesetztes Verfahren immer enger ein. (Siehe die späteren Aufgaben 55 u. 75 und die Erkl. 121 u. 122.)

Aufgabe 52. Zu welcher Summe waren 17091 Mark, die am 22. Oktober 1869 auf Zinsen zu $4\frac{2}{3}\,\%$ gegeben wurden, bis zum 7. März 1883, wo sie wieder zurückgezahlt wurden, angewachsen?

Erkl. 123. Da $p = 4\frac{2}{3}$, nämlich ein solcher Bruch ist, der sich nicht in einen endlichen Dezimalbruch verwandeln lässt, so muss man beachten, dass

$$1{,}0p = \frac{100+p}{100}$$ ist, dass also für diesen Fall:

a). $$1{,}0p = \frac{100+4\frac{2}{3}}{100} = \frac{100+\frac{14}{3}}{100} = \frac{300+14}{300} = \frac{314}{300} = \frac{157}{150}$$ ist

und dass

b). $$0{,}0p = \frac{4\frac{2}{3}}{100} = \frac{7}{150}$$ ist.

Erkl. 124. Vom 22. Oktober 1869 bis zum 7. März 1883 verfliessen: $13\frac{136}{365}$ Jahre; denn:

vom 22. Okt. 1869 bis 1. Nov. desselben Jahres verfliessen . . . . 9 Tage
„ 1. Nov. bis 1. Dez. verfliessen 30 „
„ 1. Dez. bis 1. Jan. 1870 „ 31 „
ferner verfliessen vom 1. Jan. 1870 bis 1. Jan. 1883 . . . . 13 Jahre
und schliesslich verfliessen:

Formel 18^a: $$K = k\,.\,1{,}0p^n\left(1+\frac{m_1}{m}\,.\,0{,}0p\right)$$

Siehe Erkl. 75a der 2. Auflage, oder setze in der Formel XVI der 1. Auflage:

$$\frac{1}{m} = \frac{m_1}{m}$$

Auflösung. In dieser Aufgabe ist das auf Zinseszinsen ausgeliehene Kapital $k = 17091$ Mark und der Prozentsatz $p = 4\frac{2}{3}$, bezw. nach der Erkl. 123 der Wert für $1{,}0p$ mit $\frac{157}{150}$ direkt gegeben. Ferner ist nach der Erkl. 124 die Zeit vom 22. Okt. 1869 bis 7. März 1883, während welcher jenes Kapital auf Zinseszinsen steht, $= 13\frac{136}{365}$ Jahre, hiernach ist also n, d. i. die Anzahl der ganzen Jahre $= 13$ und der echte Jahresbruchteil $\frac{m_1}{m} = \frac{136}{365}$. Schliesslich ist der künftige Wert, also $K = x$ nämlich gesucht.

Mittelst vorstehender Formel erhält man hiernach:

$$x = 17091\cdot\left(\frac{157}{150}\right)^{13}\cdot\left(1+\frac{7\,.\,136}{150\,.\,365}\right)$$

oder:

$$x = 17091\cdot\left(\frac{157}{150}\right)^{13}\cdot\frac{54750+952}{54750}$$

$$x = \left(\frac{157}{150}\right)^{13}\cdot\frac{17091\,.\,55702}{54750}$$

vom 1. Jan. 1883 bis 1. Febr. desselben Jahres . . . . . . 31 Tage
„ 1. Febr. bis 1. März verfliessen 28 „
„ 1. März bis 7. März 1883 „ 7 „
Im ganzen verfliessen also:

13 Jahre 136 Tage oder:

$13\frac{136}{365}$ Jahre.

Erkl. 125. Man hätte die Aufgabe auch so lösen können, dass man erst den künftigen Wert des ausgeliehenen Kapitals nach den 13 ganzen Jahren mit Hülfe der Formel:

$$K = k\,.\,1{,}0p^n$$

berechnet und dann noch untersucht, zu welcher Summe dieser künftige Wert in dem Jahresbruchteil $\frac{136}{365}$ mit seinen einfachen Zinsen (zu $\frac{136}{365}\cdot 4\frac{2}{3}\,\%$ für diesen Jahresbruchteil angenommen) anwächst.

Siehe die Antwort der Frage 15 oder der Frage 16 der 2. Auflage.

$$\log x = 13.(\log 157 - \log 150) + \log 17091 + \log 55702 - \log 54750$$

Nun ist:
$$\begin{array}{rcr} \log 157 &=& 2{,}1958997 \\ -\log 150 &=& 2{,}1760913 \\ \hline && 0{,}0198084 \\ && .\,13 \\ \hline && 594252 \\ && 198084 \\ \hline && 0{,}2575092 \\ +\log 17091 &=& 4{,}2327675 \\ +\log 55702 &=& 4{,}7458708 \\ \hline && 9{,}2361475 \\ -\log 54750 &=& -4{,}7383841 \\ \hline \log x &=& 4{,}4977634 \\ && 7587 \\ \hline && 47 \\ && 41{,}4 \\ \hline && 5{,}6 \\ && 5{,}5 \end{array}$$

mithin:

$num \log x = 31460{,}34$

Die ausgeliehene Summe ist also bis zum 7. März 1883 angewachsen zu 31460 Mark und 34 pf.

---

*). **Aufgabe 53.** Jemand hatte am 4. Februar 1891 eine Summe von 3517 Mark zu zahlen, zahlte aber schon am 30. Juni 1884. Wie gross war diese Zahlung bei $4\frac{4}{5}\,\%$ Zinseszinsberechnung?

Erkl. 126. Vom 30. Juni 1884 bis 1. Jan. 1885 verfliesst $\frac{1}{2}$ Jahr; vom 1. Jan. 1885 bis 1. Jan. 1891 verfliessen 6 Jahre und vom 1. Jan. 1891 bis 4. Febr. 1891 verfliessen 34 Tage.

Im ganzen wurde also $6\frac{1}{2}$ Jahr und 34 Tage oder $6 + \frac{1}{2} + \frac{34}{365} = 6\frac{107}{180}$ Jahre die am 4. Febr. 1891 zu zahlende Summe von 3517 Mark früher bezahlt.

Formel 18a:

$$K = k\,.\,1{,}0p^n\left(1 + \frac{m_1}{m}\cdot 0{,}0p\right)$$

(siehe die Anmerkung bei Aufgabe 52.)

Auflösung. Wie in der Erkl. 31 angegeben ist, muss der Billigkeit gemäss angenommen werden, dass die am 30. Juni 1884 früher gezahlte und gesuchte Summe x mit ihren Zinseszinsen zu $4\frac{4}{5}\,\%$ bis zum 4. Febr. 1891 zu der Höhe von 3517 Mark anwachsen wird.

In dieser Aufgabe ist somit das Anfangskapital, also $k = x$, nämlich gesucht; dann ist das Endkapital, also $K = 3517$, ferner ist $p = 4\frac{4}{5}$ oder $= 4{,}8$, also $1{,}0p = 1{,}048$ und $0{,}0p = 0{,}048$ (siehe Erkl. 9 oder Erkl. 27 der 2. Auflage) und schliesslich ist die Zeit, welche angibt, wieviel früher die Summe gezahlt wurde, also die Anzahl der Jahre nach der Erkl. 126 $= 6\frac{107}{180}$.

Mit Benutzung vorstehender Formel erhält man hiernach und wenn in derselben n gleich der Anzahl 6 der ganzen Jahre und $\frac{m_1}{m}$ gleich dem Jahresbruchteil $\frac{107}{180}$ gesetzt wird, für x die Bestimmungsgleichung:

$$3517 = x \cdot 1{,}048^6 \left(1 + \frac{107}{180} \cdot 0{,}048\right)$$

Diese Gleichung reduziert und nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$3517 = x \cdot 1{,}048^6 \cdot \frac{180 + 5{,}136}{180}$$

$$x \cdot \frac{1{,}048^6 . 185{,}136}{180} = 3517 \quad \text{oder:}$$

$$x = \frac{3517 . 180}{1{,}048^6 . 185{,}136}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log x = \log 3517 + \log 180 - (6 . \log 1{,}048 + \log 185{,}136)$$

Nun ist: $\log 3517 = 3{,}5461724$
$+ \log 180 = 2{,}2552725$
$= 5{,}8014449$
$-(6 . \log 1{,}048 + \log 185{,}136) = -2{,}3896587$
(siehe Hülfsrechnung)
$\log x = 3{,}4117862$
7712
150
151,2

mithin:
$num \log x = 2580{,}99$

Die am 30. Juni 1884 zu zahlende Summe beträgt hiernach:
2581 Mark.

Hülfsrechnung.

$\log 1{,}048 = 0{,}0203613$
. 6
0,1221678
$+ \log 185{,}136 = 2{,}2674768$
+ 141
2,3896587

Aufgabe 54. Am 1. Juli 1884 wurden 1000 Mark auf Zinseszinsen zu $4\frac{1}{2}$% gegeben und sollten zurückgezahlt werden, wann sie auf 2222 Mark angewachsen sind. Wann kann dies geschehen?

Formel 1ᵃ: $K = k . 1{,}0p^n$

Formel 18ᵃ:

$$K = k . 1{,}0p^n \left(1 + \frac{m_1}{m} . 0{,}0p\right)$$

(siehe die Anmerk. bei Aufgabe 52.)

Auflösung. Zur Berechnung des gesuchten Datums, an welchem die ausgeliehene Summe zurückgezahlt werden soll, hat man zu beachten, dass die Anzahl n der Jahre gesucht ist und hierzu dient vorstehende Formel 1ᵃ:

$$K = k . 1{,}0p^n$$

Setzt man in derselben:

$K = 2222$
$k = 1000$
$p = 4{,}5$, also $1{,}0p = 1{,}045$ und
$n = x$, so erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

$$2222 = 1000 . 1{,}045^x$$

und hieraus ergibt sich für x der Reihe nach:

$$1{,}045^x = \frac{2222}{1000}$$

$$1{,}045^x = 2{,}222$$

$$x \, . \, log\, 1{,}045 = log\, 2{,}222$$

$$x = \frac{log\, 2{,}222}{log\, 1{,}045} \quad \text{oder:}$$

$$x = \frac{0{,}3467441}{0{,}0191163}$$

und mittelst einfacher Division:

$$x = 18\frac{26507}{191163} \text{ Jahre.}$$

Die Anzahl x der Jahre ist hiernach gefunden, sie beträgt 18 ganze Jahre und ein Jahresbruchteil; um nun den Jahresbruchteil nach der im bürgerlichen Leben gebräuchlichen Formel zu erhalten, setze man nunmehr in vorstehender Formel 18[a]:

$$K = k \, . \, 1{,}0p^n\left(1 + \frac{m_1}{m} \, . \, 0{,}0p\right)$$

$K = 2222$; $k = 1000$; $1{,}0p = 1{,}045$; $n = 18$, nämlich gleich der soeben berechneten Anzahl der ganzen Jahre; $0{,}0p = 0{,}045$ und den gesuchten Jahresbruchteil $\frac{m_1}{m} = y$. Hiernach erhält man für y die Bestimmungsgleichung:

$$2222 = 1000 \, . \, 1{,}045^{18}(1 + 0{,}045 \, . \, y)$$

Diese Gleichung nach y aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$1 + 0{,}045 \, . \, y = \frac{2222}{1000 \, . \, 1{,}045^{18}}$$

$$0{,}045 \, . \, y = \frac{2222}{1000 \, . \, 1{,}045^{18}} - 1 \quad \text{und}$$

$$y = \left(\frac{2{,}222}{1{,}045^{18}} - 1\right) : 0{,}045$$

Nach nebenstehender Hülfsrechn. 1). erhält man hieraus:

$$y = (1{,}00612 - 1) : 0{,}045 \quad \text{oder:}$$

$$y = 0{,}00612 : 0{,}045$$

und hieraus ergibt sich durch einfache Division für den Jahresbruchteil y:

$$y = 0{,}136$$

oder diesen Jahresbruchteil in Tage verwandelt, also mit 365 multipliziert = 59,64, oder abgerundet = 60 Tage.

Das ausgeliehene Kapital ist somit nach 18 Jahren und 60 Tagen zu der

Hülfsrechnungen.

1). $log \frac{2{,}222}{1{,}045^{18}} = log\, 2{,}222 - 18 \, . \, log\, 1{,}045$

Nun ist: $log\, 2{,}222 = 0{,}3467441$
$- 18 \, . \, log\, 1{,}045 = -0{,}3440934$
(siehe Hülfsrechn. 2)

$= 0{,}0026507$
6411
96
86,4

mithin:

$$\frac{2{,}222}{1{,}045^{18}} = 1{,}00612$$

2). . . $log\, 1{,}045 = 0{,}0191163$
. 18
1529304
191163

$$18 \, . \, log\, 1{,}045 = 0{,}3440934$$

Erkl. 127. Zählt man vom 1. Juli 1884 60 Tage weiter, so erhält man den 29. August, zählt man von da ab 18 Jahre weiter, so erhält man als Datum den 29. August 1902.

angegebenen Summe angewachsen, zur Berechnung des Datums, an welchem dies nach dem 1. Juli 1884 stattfindet, beachte man die Erkl. 127, hiernach ergibt sich als Datum der 29. August 1902.

Aufgabe 55. Ein am 18. August 1877 ausgeliehenes Kapital von 25000 Mark wurde am 3. Januar 1884 mit 34121 Mark zurückbezahlt. Wieviel % rechnete man?

Formel 18ª:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n\left(1+\frac{m_1}{m}\,.\,0{,}0p\right)$$

(siehe die Anmerk. bei Aufgabe 52.)

Auflösung. Da in dieser Aufgabe die Anzahl der Jahre eine gemischte (gebrochene) ist, so erhält man, wenn der Zinsfuss p nach der im bürgerlichen Leben gebräuchlichen Formel berechnet werden soll, unter Benutzung der vorstehenden Formel, wenn man in derselben:

für das Endkapital $K = 34121$,
„ „ Anfangskapital $k = 25000$,
„ die Anzahl n der ganzen Jahre:
$n = 6$
„ den Jahresbruchteil
$\frac{m_1}{m} = \frac{138}{365}$ (siehe Erkl. 128)

und für den gesuchten Zinsfuss (Prozentsatz) $p = x$ setzt, die Bestimmungsgleichung:

$$34121 = 25000 \,.\, 1{,}0x^6\left(1+\frac{138}{365}\cdot 0{,}0x\right)$$

Um hieraus die Grösse x berechnen zu können, muss analog wie in der Aufgabe 51, die Gleichung nach $1{,}0x$ aufgelöst werden und deshalb die darin vorkommende Grösse $0{,}0x$ durch $1{,}0x-1$ ersetzt werden; man erhält:

$$34121 = 25000 \,.\, 1{,}0x^6\left(1+\frac{138}{365}\,(1{,}0x-1)\right)$$

Diese Gleichung reduziert, gibt der Reihe nach:

$$\frac{34121}{25000} = 1{,}0x^6\left(1+\frac{138}{365}\cdot 1{,}0x - \frac{138}{365}\right)$$

$$\frac{34121}{25000} = 1{,}0x^6\left(\frac{227}{365}+\frac{138}{365}\cdot 1{,}0x\right)$$

$$\frac{34121}{25000} = \frac{227}{365}\cdot 1{,}0x^6+\frac{138}{365}\cdot 1{,}0x^7$$

$$\frac{138}{365}1{,}0x^7+\frac{227}{365}\cdot 1{,}0x^6 = \frac{34121}{25000} \quad \text{oder:}$$

1). $$1{,}0x^7+\frac{227}{138}\cdot 1{,}0x^6 = \frac{34121 \,.\, 365}{25000 \,.\, 138}$$

Man hätte hier also eine höhere Gleichung vom 7. Grade zu lösen, was, wie in der Aufgabe 51 angedeutet ist, geschehen könnte.

Erkl. 128. Vom 18. August 1877 bis zum 3. Januar 1884 verstreichen $6\frac{138}{365}$ Jahre; denn:

vom 18. Aug. 1877 bis 1. Sept. desselben Jahres verfliessen . . . . 12 Tage
„ 1. Sept. bis 1. Okt. verfliessen 31 „
„ 1. Okt. „ 1. Nov. „ 31 „
„ 1. Nov. „ 1. Dez. „ 30 „
„ 1. Dez. „ 1. Jan. 1878 „ 31 „
dann verfliessen vom 1. Jan. 1878 bis 1. Jan. 1884 im ganzen 6 Jahre und schliesslich verfliessen vom 1. Jan. 1884 bis 3. Jan. desselben Jahres 3 Tage.

Im ganzen sind also vom 18. August 1877 bis 3. Januar 1884
6 Jahre 138 Tage oder
$6\frac{138}{365}$ Jahre verflossen.

Erkl. 129. Für den Jahresbruchteil $\frac{138}{365}$ kann man auch den nicht viel von ihm verschiedenen Bruch: $\frac{135}{360}$ oder $\frac{3\,.\,45}{8\,.\,45}$, bezw. den Näherungswert $\frac{3}{8}$ setzen; da bei der späteren logarithmischen Rechnung es ohne Unterschied bleibt, ob man den Bruch $\frac{138}{365}$ oder den Bruch $\frac{135}{360}$, bezw. den Bruch $\frac{3}{8}$ in Rechnung zieht.

Um den Wert für $x = p$ zu bestimmen, der dem sich aus der Gleichung 1). ergebenden Wert für x sehr nahe kommt und streng mathematisch genau der eigentlich richtige ist, berechne man p aus der allgemeinen Formel 1[a]:

$$K = k \,.\, 1{,}0p^n$$

indem man in derselben:

$$K = 34121$$
$$k = 25000$$
$$p = y \quad \text{und}$$
$$n = 6\tfrac{138}{365} \text{ oder auch gleich dem}$$

Näherungswert: $6\frac{3}{8}$ setzt (siehe Erkl. 129).

Hiernach erhält man:

$$34121 = 25000 \,.\, 1{,}0y^{6\frac{3}{8}}$$

Diese Gleichung nach y aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$1{,}0y^{6\frac{3}{8}} = \frac{34121}{25000}$$

$$1{,}0y^{\frac{51}{8}} = \frac{34121}{25000}$$

$$1{,}0y^{51} = \left(\frac{34121}{25000}\right)^8$$

$$1{,}0y = \sqrt[51]{\left(\frac{34121}{25000}\right)^8} \quad \text{und}$$

$$2). \;.\; 1{,}0y = \left(\frac{34121}{25000}\right)^{\frac{8}{51}}$$

oder nach nebenstehender Hülfsrechn.:

$$1{,}0y = 1{,}05$$

Berücksichtigt man jetzt, dass $1{,}0y = \frac{100+y}{100}$ ist, so erhält man:

$$\frac{100+y}{100} = 1{,}05$$

und hieraus ergibt sich:

$$100 + y = 1{,}05 \,.\, 100 = 105$$
$$y = 105 - 100 \quad \text{oder:}$$
$$y = 5$$

Nach der mathematisch richtigen Formel erhält man also für den gesuchten Zinsfuss (Prozentsatz) y:

$$y = 5\,\%$$

welcher Wert von dem sich aus der höheren Gleichung 2). ergebenden Wert für x nur um ein sehr geringes, fast um nichts, unterscheiden wird.

Hülfsrechnungen.

1). $\log\left(\frac{34121}{25000}\right)^{\frac{8}{51}} = \frac{8}{51} \cdot \left(\log 34121 - \log 25000\right)$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 34121 &= 4{,}5330218 \\ -\log 25000 &= -4{,}3979400 \\ \hline & 0{,}1350818 \\ & \phantom{-0{,}13508}\cdot 8 \\ \hline & 1{,}0806544 \\ & \phantom{-0{,}1350}\cdot \tfrac{1}{51} \\ \hline \log\left(\frac{34121}{25000}\right)^{\frac{8}{51}} &= 0{,}0211893 \end{aligned}$$

mithin:

$$\left(\frac{34121}{25000}\right)^{\frac{8}{51}} = 1{,}0500$$

2). $\log 1{,}057^7 = 7 \,.\, \log 1{,}05$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 1{,}05 &= 0{,}0211893 \\ & \phantom{0{,}02118}\cdot 7 \\ \hline \log 1{,}05^7 &= 0{,}1483251 \\ & \phantom{0{,}14}3250 \end{aligned}$$

mithin:

$$1{,}05^7 = 1{,}4071$$

3). $\log \frac{227}{138} \cdot 1{,}05^6 = 6 \,.\, \log 1{,}05 + \log 227 - \log 138$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 1{,}05 &= 0{,}0211893 \\ & \phantom{0{,}02118}\cdot 6 \\ \hline & 0{,}1271358 \\ + \log 227 &= 2{,}3560259 \\ \hline & 2{,}4831617 \\ - \log 138 &= 2{,}1398791 \\ \hline & 0{,}3432826 \\ & \phantom{0{,}34}2707 \\ \hline & \phantom{0{,}343}119 \\ & \phantom{0{,}34}118{,}2 \end{aligned}$$

mithin:

$$\frac{227}{138} \cdot 1{,}05^6 = 2{,}20435$$

Erkl. 157. Die Einnahmen, welche aus Grundstücken, Häusern etc. fliessen, bezeichnet man mit dem speziellen Namen: „Pacht- oder Mietzins."

Erkl. 158. Die Einnahmen, welche jemandem (meist einer Gemeinde oder einem Staate) infolge gewisser sogen. Gerechtsame (Servitute) auf Häuser, Grundstücke etc. in bestimmten Zeitabschnitten zufliessen, wie z. B. die Zehntabgaben etc., nennt man: auf jenen Häusern, Grundstücken etc. ruhende Reallasten oder kurzweg Lasten.

Derartige auf Grundstücken etc. ruhende Lasten (oder auch Servituten genannt) kommen jetzt nur noch selten vor, indem die meisten derartigen Lasten (Abgabe von Grundzinsen) abgelöst werden (Ablösungsrechnung), zu welchem Zwecke die einzelnen Staatsregierungen die Errichtung der Grundrentenbanken unterstützt haben.

Frage 21. Wie werden die bei einer Rente an den einzelnen Terminen stattfindenden Einnahmen benannt?

Erkl. 159. Das Wort „Rate" ist ein lateinisches Wort und heisst: verhältnismässiger Beitrag oder Anteil, und auch „die berechnete" (nämlich die berechnete Summe). Gewöhnlich versteht man unter Rate eine Raten- oder Teilzahlung.

Antwort. Bei einer Rente werden die an den einzelnen Terminen stattfindenden Einnahmen „Rentenbezüge", „Raten" (siehe Erkl. 159) oder auch selbst „Renten" genannt, so sagt man z. B. eine Rente von 600 Mark, wobei man unter den 600 Mark einen Rentenbezug, eine Rate jener Rente zu verstehen hat.

Frage 22. Was versteht man unter Rente im engeren Sinne?

Antwort. Unter Rente im engeren Sinne versteht man einen Geldbetrag, welcher jemandem in gewissen, meist in gleichen, oft auch in periodisch wiederkehrenden Terminen, infolge irgend einer Gegenleistung ausgezahlt wird.

Frage 23. Welche besondere Benennungen finden in bezug auf diejenige Person statt, welche eine Rente empfängt (bezieht) und auf diejenige Person, welche eine Rente auszahlt?

Antwort. Diejenige Person, welche eine Rente empfängt (bezieht) und unter welcher man sich auch mehrere Personen vereint denken kann, nennt man den Besitzer der Rente oder auch Rentier, Rentner, Rentierer, Rentenierer.

Diejenige Person, welche eine Rente auszuzahlen hat und unter welcher man sich fast ausschliesslich eine Verbindung von Personen, eine Gesellschaft, zu denken hat, nennt man Rentengeber, Entrepreneur (Unternehmer), bezw. Rentenbank.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der ausführliche Prospekt und das ausführliche Inhaltsverzeichnis der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung gratis und portofrei bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

Vorläufiges Inhaltsverzeichnis

der demnächst erscheinenden Hefte 101—160.

Heft 101. Körperberechnungen. 2. Buch.

Inhalt: Praktische Aufgaben über die fünf einfachen geometrischen Körper, als: Berechnung von Behältern, Gräben, Feldschanzen, Eisenbahndämmen u. Schwellen, Planken, Balken, Bohlen, Turmdächer, Röhrenleitungen, cylindr. Gefässen, Baumstämmen, Mörsern, Ringmauern, Dachkändeln, Schiffsmasten, Gewölben, Brunnenschachten, Trichtern, Granaten, Bassins etc.

Heft 102. Die arithmetischen, geometrischen und harmonischen Reihen. (Forts. von Heft 26.)

Inh.: Gemischte prakt. Aufgaben über die nied. arithm. und die geometr. Reihen.

Heft 103. 104. 105. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 101.)

Inh.: Die gegenseitigen Beziehungen der 5 einfachen Körper und der regul. Polyeder (auch Aehnlichkeit), Aufgaben.

Heft 106. „ 107. „ 108. Die arithmetischen, geometr. und harmonischen Reihen, Schluss. (Forts. von Heft 102.)

Inh.: Gemischte prakt. Aufgaben auch über die harmonischen Reihen. Polygonal- und Pyramidalzahlen. — Solche Aufgaben, welche auf Diophantische Gleichungen, Kettenreihen und Kettenbrüche führen. — Schluss dieses Kapitels, Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelverzeichnis etc.

Heft 109. „ 110. „ 111. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 105.)

Inh.: Ueber zusammengesetzte Körper. Berechnung solcher Körper, welche sich in Teile zerlegen lassen, die mittelst den im 1. Buch aufgestellten Formeln berechnet werden können. — Auch Berechnung von Krystallkörpern.

Heft 112. Zinseszinsrechnungen. Schluss. (Forts. von Heft 50.)

Inh.: Weitere gemischte praktische Aufgaben und Schluss der Zinseszinsrechnung.

Heft 113. } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ **114.** } (Forts. von Heft 111.)

Inh.: Ueber Maxima u. Minima der Körper unter gewissen Bedingungen.

Heft 115.
„ **116.** } **Rentenrechnung als Fortsetz. der Zinseszinsrechnung.**
„ **117.**

Inh.: Aufstellung der Formeln, nebst den mannigfaltigsten Aufgaben über die Zeitrenten.

Heft 118. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. v. Heft 114.)

Inh.: Einfache Rotationskörper. Ueber die Berechnung solcher Rotationskörper, welche sich auf die einfachen Körper zurückführen lassen.

Heft 119.
„ **120.** } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ **121.** } (Forts. von Heft 118.)
„ **122.**

Inh.: Simpson'sche Körperregel, Berechnung des Prismatoids, Obelisken, Pontons, Keils, des schief abgeschnittenen Prismas, Cylinders u. Kegels (Cylinder- und Kegelhuf), des Ellipsoids, Sphäroids und des Fasses etc.

Heft 123. Rentenrechnung. — Schluss. (Forts. von Heft 117.)

Inh.: Schluss der Rentenrechnung. — Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis etc. über die Zinseszins- und Rentenrechnungen.

Heft 124. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 122.)

Inh.: Schiefe Körper. Berechnung des schiefen Prismas, schiefen Cylinders und Kegels, sowie der schiefen Pyramide.

Heft 125. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ **126.** } **einer Unbekannten.**
(Forts. von Heft. 54.)

Inh.: Ueber das Auflösen besond. Gleichungen, Wurzel- und Exponentialgleichungen etc.

Heft 127.
„ **128.** } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ **129.** } (Forts. von Heft 124.)
„ **130.**

Inh.: Ebene Trigonometrie angewandt auf stereometrische Berechnungen.

Heft 131. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ **132.** } **einer Unbekannten.**
(Forts. v. Heft 126.)

Heft 133. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 130.)

Inh.: Aufgaben aus der mathem. Geographie.

Heft 134. Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten. (Forts. v. Heft 132.)

Inh.: Ueber das Auflösen d. Gleichungen mittelst der Regula falsi, Regula lancium.

Heft 135.
„ **136.** } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ **137.** } (Forts. von Heft 133.)
„ **138.**

Inh.: Stereometr. Aufgaben über einzelne Teile der Physik, als: Trägheitsmoment der Körper. — Elastizität und Festigkeit der Körper. — Gleichgewicht u. Druck tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen (hydrostatische Presse). — Gleichgewicht zwischen tropfbar flüssigen u. festen Körpern (archimedisches Prinzip, schwimmende Körper). — Spezif. Gewicht fester und flüssiger Körper. — Bewegung des Wassers (Ausfluss aus Röhren). — Gleichgewicht und Druck der Luft (Mariotte'sches Gesetz, Barometer, Luft- und Wasserpumpe, Luftballon). — Bewegung und Widerstand der Luft. — Ausdehnung der Körper durch Wärme, Wärmekapazität (Calorie, spezif. Wärme).. — Dichtigkeit, Volumen und Expansivkraft der Wasserdämpfe; Geradlinige Fortpflanzung des Lichts (Beleuchtung). — Berechnung und Zerlegung des Lichts durch Prismen etc.

Heft 139. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ **140.** } **einer Unbekannten.**
(Forts. von Heft 134.)

Inh.: Allgemeine Wortaufgaben.

Heft 141. } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ **142.** } (Forts. von Heft 138.)

Inh.: Guldini'sche Körperregel. Berechnung von Rotationskörpern, als: der Kugelteile, der Ringkörper, des Paraboloids, Neiloids, Paraboloidenstumpfes, Neiloidenstumpfes, des Fasses etc.

Heft 143. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ **144.** } **einer Unbekannten.**
(Forts. v. Heft 140.)

Inh.: Aufgaben über gleichförmige Bewegung.

Heft 145. } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ **146.** } (Forts. von Heft 142.)

Inh.: Stereometr. Berechnungen gelöst durch sphär. Trigonometrie und solche stereometr. Berechnungen, welche auf kubische Gleichungen führen.

Heft 147. } **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ **148.** } **einer Unbekannten. Schluss.**
„ **149.** } (Forts. v. Heft 144.)

Inh.: Mischungsaufgaben etc. — Schluss des Kapitels, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhaltsverzeichn. etc.

Heft 150. } **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ **151.** } **Schluss.** (Forts. v. Heft 146.)

Inh.: Die Poinsot'schen (sternförmigen) Körper. — Schluss des 2. Buchs der Körperberechnungen, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis der Körpermasse etc.

Heft 152. Magnetismus und Elektrizität.

Inh.: Anwendung des Magnetismus und der Elektrizität in der neueren Technik etc.

Heft 153. } **Planimetrie: Konstruktionsauf-**
„ **154.** } **gaben, gelöst durch geometr.**
„ **155.** } **Analysis.** (Forts. von Heft 2.)

Heft 156. } **Planimetrie: Konstruktionsauf-**
„ **157.** } **gaben, gelöst durch algebr.**
Analysis. (Forts. von Heft 8.)

Heft 158. Trigonometrie. (Forts. von Heft 27.)

Inh.: Das schiefwinklige Dreieck mit vielen praktischen Aufgaben.

Heft 159. } **Differentialrechnung.** (Forts.
„ **160.** } von Heft 59.)

Inh.: Entwicklung des Differentialquotien n implizierter Funktionen.

u. s. w., u. s. w.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

138. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Algebra. Zinseszins- u. Rentenrechnung. Fortsetzung von Heft 137. Seite 161—176.




Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken-** u. **Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Algebra.

Zinseszins- und Rentenrechnung.

Fortsetzung von Heft 137. — Seite 161—176.

Inhalt:

…er die Renten und die Rentenrechnung im allgemeinen. — Ueber die Rechnung der Zeitrenten. — Ent…lung der Rentenformeln für eine nachschüssige Jahresrente. — Gelöste Aufgaben. — Entwicklung der Rentenformeln für eine vorschüssige Jahresrente. — Gelöste Aufgaben.

Stuttgart 1884.

Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.

…einen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Das vorläufige Inhaltsverzeichnis der Hefte 101—160 befindet sich auf